LA INTEGRACIÓN DE GEOGEBRA EN EL DESARROLLO DEL CARÁCTER INTELECTUAL

JONATHAN EDUARDO RUÍZ RAMÍREZ

Trabajo de grado presentado para optar por el título de Magíster en Educación con énfasis en lectoescritura y matemáticas

DIRIGIDO POR

INÉS CRISTINA TORRES LONDOÑO

UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

BOGOTÁ, 2018

	Resumen Analítico en Educación - RAE
Universidad Externado de Colombia	

1. Información General	
Tipo de documento	Tesis de grado
Acceso al documento	Universidad Externado de Colombia. Biblioteca Central
Título del documento	La integración de GeoGebra en el desarrollo del carácter intelectual
Autor(es)	Ruiz Ramírez Jonathan Eduardo
Director	Torres Londoño Inés Cristina
Publicación	
Palabras Claves	GeoGebra, Carácter Intelectual, Enseñanza para la Comprensión, Pensamiento Matemático.

2. Descripción

Actualmente, los procesos de enseñanza-aprendizaje están enmarcados en el uso de las diferentes tecnologías, que trabajan a la par con los medios tradicionales usados en el aula. Es así como se requiere favorecer el pensamiento creativo, reflexivo y crítico en cualquier campo del conocimiento para mejorar la capacidad de aprendizaje y discernimiento crítico por parte de los estudiantes. El profesor Ron Ritchhardt, uno de los más activos representantes en la actualidad de la Enseñanza para la Comprensión, plantea un concepto que es el sustento del presente estudio: el “carácter intelectual" (2002). Este resulta ser una disposición que permite hacer del pensamiento un agente primordial de las acciones del estudiante dentro de su proceso de enseñanza y aprendizaje.

Este estudio se propone valorar cómo una práctica pedagógica que busca la resolución de un problema geométrico, mediada por el uso del software GeoGebra y apoyada en la formulación de preguntas estratégicas genera carácter intelectual y desarrolla pensamiento matemático en dos estudiantes de grado décimo de una institución educativa de carácter oficial de Bogotá. Se revisa si con ella se impulsan el desarrollo de procesos de pensamiento matemático, la construcción de hipótesis y el planteamiento y desarrollo de argumentos. Indagar si un intento por fortalecer el carácter intelectual de los estudiantes puede incidir en el mejoramiento del pensamiento en el área de matemáticas es la pregunta que orienta este estudio.

3. Fuentes

AUSUBEL, D. P., NOVAK, J. D. y HANESIAN, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo* (2a. ed.). México D.F. México. Editorial Trillas.

BARRERA-LEÓN (2014). ¿De qué manera se diferencia el marco de la Enseñanza para la Comprensión de un enfoque tradicional? *Ruta Maestra*, edición 9. Santillana. pp 26-32.

BELLO J (2007). *Mediación del software GeoGebra en el aprendizaje de programación lineal en alumnos del quinto grado de educación secundaria*" (Tesis de maestría)

BETANCOURTH, M. MADROÑERO, E. (2014). *La enseñanza para la comprensión como didáctica alternativa para mejorar la interpretación y producción oral y escrita en Lengua Castellana en el grado quinto del Centro Educativo Municipal La Victoria de Pasto*. Universidad de Manizales. Facultad de Ciencias Sociales y Humanas. Recuperado el 20-01-2016 en: http://ridum.umanizales.edu.co:8080/jspui/bitstream/6789/1864/1/TESIS%20ENSE%C3%91ANZA%20PARA%20LA%20COMPRENSI%C3%93N.pdfhttp://ridum.umanizales.edu.co:8080/jspui/bitstream/6789/1864/1/TESIS%20ENSE%C3%91ANZA%20PARA%20LA%20COMPRENSI%C3%93N.pdf

CARRANZA, M. A. (2011). *Exploración del impacto producido por la integración del ambiente de geometría dinámica (AGD) GeoGebra en la enseñanza de los cursos de matemáticas básicas de primer semestre de la Universidad Nacional de Colombia-Sede Palmira* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Palmira, Colombia.

CRESPO, C. (2006). *Las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural*. Video Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=tL24PjD-a7w

DAVID PERKINS. (1997). *Una cultura donde el pensamiento sea parte del aire*. Entrevista en Zona Educativa. Pág. 39.

DAZA L, (2012). *Interpretación de la factorización a través del uso del GeoGebra*. (Tesis de pregrado) Universidad de Antioquia. Recuperado de: http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/1767/1/JC0790.pdf

DEBÁRBORA N (2012). *El uso del GeoGebra como recurso educativo digital en la transposición didáctica de las funciones de proporcionalidad*. (Tesis de maestría) Universidad Nacional de San Martín.

ELDER, L., PAUL, R., DE PENSAMIENTO CRÍTICO, C., & SOCRÁTICOS, P. (2002). *El arte de formular preguntas esenciales*. *Basado en conceptos de pensamiento crítico y principios socráticos. Fundación para pensamiento crítico*, pp. 1-39.

GARCÍA, M. D. M. (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula* (Tesis doctoral). Universidad de Almería.

GARDNER, HHOWARD. (2001). *Estructuras de la Mente. La Teoría de Las Inteligencias Múltiples.* Fondo de Cultura Económica LTDA.

HAREL, G., & SOWDER, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical thinking and learning*, *7*(1), 27-50.

HOLLEBRANDS, K. F., CONNER, A., & SMITH, R. C. (2010). *The nature of arguments provided by college geometry students with access to technology while solving problems*. Journal for Research in Mathematics Education, 324-350.

LINCK, L. (2013). *Pensamiento visible*. 24 septiembre. Sitio web:

https://www.usfq.edu.ec/publicaciones/para_el_aula/Documents/para_el_aula_07/0003_para_el_aula_07.pdf

MARTÍNEZ, J. (2011) *Métodos de investigación cualitativa*. En *Revista Silogismo*, volumen 8. Julio – Diciembre. Bogotá, Colombia.

MENDOZA S, PABÓN J (2013) *Propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en niños de 5 años*. Colegio Bilingüe Real Americano. Bogotá, Colombia.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL DE COLOMBIA. *Estándares básicos de competencias en matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!* Pp. 46 a 79.

NOVAK, J. D. y GOWIN, B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Martínez Roca. Barcelona.

OSUNA S (2008) "*El aprendizaje de las matemáticas en alumnos de ingeniería electrónica del instituto tecnológico de Mazatlán, Sinaloa*." México.

PAUL, R. y ELDER, L. (2002). *El arte de formular peguntas esenciales*. Foundation for Critical Thinking. Recuperado de: https://www.criticalthinking.org/resources/PDF/SP-AskingQuestions.pdf.

PEDRAZA, F., BERNAL, R., & MORA, A. (2014). *Sistema nacional de evaluación estandarizada de la educación*. Alineación del examen Saber, 11, 2014-2.

PEÑA-LÓPEZ, I. (2012). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework. Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*.

PIAGET, J. INHELDER, B. (1958). *Growth of Logical Thinking*. New York: Basic Books.

POGRÉ, P (2007). *¿Cómo Enseñar para que los Estudiantes Comprendan?* Diálogo Educ., Curitiba, v. 7, n. 20, p. 25-32, jan./abr. 2007

PRESMEG, N. C. (2006). *Research on visualization in learning and teaching mathematics. Handbook of research on the psychology of mathematics educatioeducation.* Rotterdam, Inglaterra. Sense Publishers.

QUINTERO E. (2014). *Dificultades que identifican los estudiantes a través de la metacognición en el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria*. (Tesis de maestría) Universidad Autónoma de Manizalez.

RITCHHART, R. (2002). *Intellectual Character. What it is, why it matters, and how to get it.* San Francisco, Estados Unidos. Jossey Bass.

RITCHHART, R. (2015). *Creating cultures of thinking: The 8 forces we must master to truly transform our schools.* John Wiley & Sons.

TORRES C. Y RACEDO D. (2006) *Estrategia didáctica mediada por el software GeoGebra para fortalecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría en estudiantes de 9° de básica secundaria.* (Tesis de maestría) Universidad de la costa "CUC"

VALLEJO G (2011) *Evaluación de un programa para el desarrollo del pensamiento formal en estudiantes del décimo año de educación básica de la unidad educativa "Tumbaco" de la ciudad de Quito*. (Tesis de maestría) Universidad técnica Particular de Loja.

VÁZQUEZ, RECIO, R (2011). *Enseñanza para la comprensión: el caso de la escuela rural de Bolonia*. Cádiz, España. Recuperado el: 02-05-2014 en: http://www.rieoei.org/rie57a08.pdfhttp://www.rieoei.org/rie57a08.pdf

WISKE, M. S. (Comp.). (2003). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Buenos Aires, Barcelona, México. Paidós.

4. Contenidos

El trabajo se encuentra dividido en una introducción, cinco capítulos y los anexos correspondientes.

En el primer capítulo se presenta el problema de investigación a partir de la necesidad del Colegio Próspero Pinzón I.E.D. de propiciar en sus estudiantes un desarrollo en el pensamiento matemático a través de la enseñanza para la comprensión. Así mismo, se toma como eje la pregunta de investigación ¿Qué rasgos del carácter intelectual (Ritchhardt, 2002) en el desarrollo pensamiento matemático pueden percibirse a partir de una tarea de geometría mediada por el software GeoGebra en el caso de dos estudiantes de grado décimo del colegio Próspero Pinzón I.E.D.? Acto seguido, se describen los objetivos de acuerdo a las temáticas y la población seleccionada.

En el segundo capítulo se explora el fundamento teórico que respalda el desarrollo de carácter intelectual a partir de tareas y preguntas, por medio de los diferentes autores e investigadores que han trabajado en este aspecto.

El tercer capítulo presenta el enfoque investigativo (investigación cualitativa) y el tipo de investigación (investigación acción). Así mismo, se caracteriza la población estudiada, restringida a dos estudiantes de grado décimo del Colegio Próspero Pinzón I.E.D. y las variables de análisis, que responden al pensamiento creativo, reflexivo y crítico. Finalmente se destaca la herramienta de recolección de datos y la propuesta de intervención.

El cuarto capítulo expone los resultados obtenidos y presenta la disertación de los mismos a la luz de los referentes teóricos presentados en el segundo capítulo.

En el quinto capítulo se presentan las conclusiones, recomendaciones y limitaciones de la investigación.

5. Metodología

Enfoque cualitativo. Tipo Investigación acción. Método de recolección de datos: Estudio de caso.

6. Conclusiones

- Se pudo observar que, al momento de desarrollar las preguntas, las estudiantes son reacias a compartir sus opiniones en público porque tienen miedo de lo que sus compañeros o incluso su profesor puedan opinar de ellas. Allí la actitud del docente juega un papel fundamental al momento de animar a sus estudiantes, a pesar de que en algunas ocasiones ellas estén equivocadas, puesto que de esta forma se favorece su disposición. Así van ganando confianza y se permiten seguir en la búsqueda de la verdad. Posteriormente, cuando su capacidad de exploración se pone de manifiesto, van adquiriendo la seguridad para escribir sus ideas mientras reflexionan sobre sus propios hallazgos, haciendo evidente que la motivación y el refuerzo positivo son vitales para el afloramiento del carácter intelectual.

- Es notable que Estudiante 1 (E1) y Estudiante 2 (E2) al comienzo quieren dar una respuesta rápida a lo que se les pregunta, pues dicen lo que primero les viene a la mente o lo que ven a primera vista. Por eso es que el docente pregunta de manera paciente para que las estudiantes tomen su tiempo para reflexionar sobre lo que observan y sobre su propio pensamiento. Al momento de la interacción entre E1 y E2 se pudo observar que expresaban sus ideas, acuerdos y desacuerdos, y de esta manera terminaban por reafirmar su pensamiento o aprendiendo de su par académico.

- En primera medida se puede afirmar que, a partir de los resultados obtenidos con las dos estudiantes el ejercicio propuesto, tomando como referencia una tarea geométrica permite el afloramiento del carácter intelectual y hace evidente cómo esa disposición lleva a la competencia matemática. A su vez, el fortalecimiento de dicha competencia genera la aparición de nuevos interrogantes mediante los cuales se sigue propiciando el desarrollo de ese carácter intelectual.

- El conocimiento es importante, pero lo es en mayor medida, lo que los estudiantes pueden lograr a partir de dicho conocimiento: en situaciones que los invitan a dar respuestas, que les ayudan a comprender mejor, mientras favorecen su pensamiento matemático.

- La actividad generó muchas expectativas cuando E1 y E2 veían que no solo estaban presentes sus ideas, sino las de otro par académico en torno a la misma tarea, llegando a respuestas parecidas, pero por caminos diferentes.

- Es de esperar que las dos estudiantes tomadas como referencia puedan, a través del desarrollo del carácter intelectual, potenciar su pensamiento matemático haciendo uso de los conocimientos previos adquiridos, de sus intereses y su disposición.

- En una tarea de geometría la pregunta genera muy fácilmente en los estudiantes la curiosidad y una reflexión metacognitiva, que favorecen la disposición y el deseo por aprender matemáticas.

- A medida que las sesiones avanzaban, el pensamiento matemático de las dos estudiantes iba en aumento. Sus argumentos, sus hallazgos, la seguridad con la que se expresaban, hacían evidentes su pensamiento creativo, reflexivo y crítico. El carácter intelectual se daba a medida que aumentaba la disposición de E1 y E2 por ir más allá de lo que se les pregunta, porque perseveraban en esa búsqueda de la verdad.

- El desarrollo de este trabajo de investigación se ve mediado por la observación meticulosa y directa de dos estudiantes (E1 y E2) seleccionadas de un grupo más amplio. El seguimiento del proceso de mejoramiento de pensamiento matemático, mediado por el desarrollo de carácter intelectual de un grupo de estudiantes resultaría demasiado dispendioso para un texto de las aspiraciones y alcances de la presente investigación, por tanto, la muestra fue reducida a sólo dos sujetos de investigación.

- Se pudo observar una buena disposición por parte de las dos estudiantes para la realización de la tarea gracias a la estrecha relación que tienen con las herramientas tecnológicas, lo cual favorece el desarrollo de este tipo de actividades.

- Si bien se encontró disposición inicial por la actividad, también se hizo evidente que al no tener claridad sobre ciertos conceptos que en este grado de escolaridad deberían estar presentes, pueden surgir dificultades en la construcción del árbol pitagórico y a su vez en la búsqueda de las relaciones solicitadas

- Sorprendentemente la estudiante de este estudio que normalmente no obtiene buenos resultados en un esquema de evaluación por notas se atreve a opinar y a compartir sus ideas, se siente orgullosa de las cosas que va encontrando y no siente que tengan menor importancia que las de sus pares.

- El hecho de lograr la disposición de los estudiantes sin que mediara una nota para desarrollar la tarea es motivante para el docente, haciéndolo pensar sobre el verdadero sentido de enseñar matemáticas y de la evaluación misma.

- Por el desarrollo tecnológico del contexto inmediato de los jóvenes de hoy en día, ellos están dispuestos a manejar herramientas tecnológicas y por ende su desempeño es bueno en esta clase de tareas. Esta es una característica que los docentes debemos tener en cuenta para proponer tareas que favorezcan el desarrollo del carácter intelectual, ya que sin la buena disposición esto no sería posible. Observando el papel que tuvo el software GeoGebra en la intervención, se puede afirmar que E1 y E2 la ven como una herramienta que les ayuda fácilmente a verificar sus ideas, a hacer construcciones, pero entienden también que son ellas las protagonistas de su aprendizaje, porque ellas mismas son las que piensan en cómo usar el software a su favor.

Elaborado por:	RUIZ RAMÍREZ JONATHAN EDUARDO
Revisado por:	TORRES LONDOÑO INÉS CRISTINA

Fecha de elaboración del Resumen:	30	03	2018

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Hoy más que nunca, los procesos de enseñanza-aprendizaje están enmarcados en el uso de los medios de comunicación y las diferentes tecnologías, que trabajan a la par con los medios tradicionales usados de forma acostumbrada en el aula. Se requiere así favorecer el pensamiento creativo, reflexivo y crítico en cualquier campo del conocimiento en el momento de mejorar la capacidad de aprendizaje y discernimiento por parte del estudiante. Su trabajo, con el apoyo del docente, debe someterse a diversas situaciones que busquen consolidar en él un pensamiento divergente, capaz de valorar los contenidos recibidos a través de los diferentes medios. El profesor Ron Ritchhardt, uno de los más activos representantes en la actualidad de la Enseñanza para la Comprensión, propuesta liderada desde la Escuela de Educación de la Universidad de Harvard, plantea un concepto que es el sustento de este estudio: el carácter intelectual (Ritchhart, 2002). Este resulta ser una disposición que permite hacer del pensamiento un agente muy importante de las acciones del estudiante dentro de su proceso de enseñanza y aprendizaje. El carácter intelectual puede educarse y llevar al estudiante a enfrentar de manera crítica, reflexiva y creativa las realidades complejas del mundo de hoy.

No podemos desconocer el hecho de que gracias al conocimiento nos convertimos en seres autónomos, ágiles en la toma de decisiones, reflexivos, con saberes disciplinares y con visión práctica para la vida. Los docentes de matemáticas, en particular, debemos garantizar el desarrollo de un pensamiento matemático que permita a los estudiantes enfrentarse tanto a los temas propios de la disciplina como a temas generales de la historia y la existencia humana, así como a su vida cotidiana. No basta con aprender a realizar operaciones matemáticas. Es importante aprender a quererlas entender y saber qué hacer con ellas. Es así como cabe preguntarse por cómo puede darse el desarrollo de las cualidades o atributos que describe Ron Ritchhart cuando se refiere al “carácter intelectual (2002) y este debe favorecerse desde la formación básica, pues esto debe llevar a que el estudiante mejore considerablemente su nivel de pensamiento y de análisis frente a los problemas a los que se vea enfrentado, no solo dentro del aula de clase, sino en el día a día. Tal y como lo plantea este investigador, en el aula debe propiciarse el desarrollo de una cultura de pensamiento que no solo permita que los estudiantes piensen cada vez más y mejor sino que también muestren disposición a hacerlo, es decir, que desarrollen carácter intelectual.

En los estudiantes del Colegio Próspero Pinzón IED se registra poca capacidad para desarrollar procesos de pensamiento matemático. De igual manera es escasa la construcción de hipótesis o el planteamiento y desarrollo de argumentos. Esto amerita la búsqueda de estrategias para fomentar estos procesos mentales en los alumnos en la asignatura de matemáticas y a su vez deben fortalecer la capacidad de análisis y pensamiento crítico y reflexivo en otras asignaturas. Indagar si un intento por fortalecer el carácter intelectual de los estudiantes puede incidir en el mejoramiento del pensamiento en el área de matemáticas es la pregunta que orienta este estudio realizado por un maestro de secundaria de un colegio oficial de la ciudad de Bogotá.

CAPÍTULO I

Problema de investigación

En este primer capítulo se presentan aspectos relacionados con el contexto en el cual se realizó este estudio, su justificación, así como de la pregunta de investigación y los objetivos que rigen el desarrollo del proyecto.

1.1 Planteamiento del problema

En el Colegio Próspero Pinzón IED se formuló en el año 2008 el proyecto de Educación Media Fortalecida en Matemáticas, el cual se implementó a partir del año 2012, como una alternativa de vida para el futuro de los estudiantes. Con esta iniciativa se ha pretendido reforzar las matemáticas como una herramienta necesaria que les permita desempeñarse de forma activa en la sociedad, teniendo en cuenta que de acuerdo con lo señalado por PISA (2012), “las matemáticas son una herramienta esencial para los jóvenes a la hora de afrontar cuestiones y desafíos relativos a aspectos personales, profesionales, sociales y científicos de su vida” (p. 8).

La adopción del proyecto nos hizo reflexionar a los docentes del equipo de matemáticas, sobre qué podíamos hacer desde los distintos campos del conocimiento para ser consecuentes con el proyecto. El camino para responder a la pregunta comenzó con la necesidad de hacer una reorganización curricular por ciclos y la decisión de apuntar a la transformación de las prácticas pedagógicas a partir de la integración de distintos campos del conocimiento en tópicos generativos. Este es un concepto que forma parte del marco de Enseñanza para la Comprensión, metodología pedagógica y didáctica adoptada por la institución en su proyecto educativo institucional, PEI (2014), y que propone seleccionar temas que permiten establecer muchas conexiones entre las diferentes disciplinas, así se trabajen con una sola de ellas. Bajo este principio se buscaba lograr potenciar procesos de pensamiento matemático que llevaran a los estudiantes a mayores comprensiones a partir, además, del desarrollo de tres competencias: la modelación, la argumentación y la comunicación. Estos consisten en:

- Modelación: capacidad del estudiante para expresar ideas, interpretar, usar diferentes tipos de representación, describir relaciones matemáticas, relacionar materiales físicos y diagramas con ideas matemáticas, modelar usando el lenguaje escrito, oral, concreto, pictórico, gráfico y algebraico.

- Argumentación: se refiere a la capacidad que el estudiante tiene para dar cuenta del cómo y del porqué de los caminos que se siguen para llegar a conclusiones, justificar estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de situaciones problema, formular hipótesis, hacer conjeturas.
- Comunicación: tiene que ver directamente con los anteriores dos procesos, ya que por medio de la competencia comunicativa podemos expresar los procesos interpretativos, representativos y argumentativos de forma precisa y adecuada.

La inquietud de los docentes de matemáticas llevó a los maestros de los diferentes campos del conocimiento a preguntarse si se estaban potenciando esos procesos de pensamiento en las clases. Al interior del campo del conocimiento matemático, los docentes nos dimos cuenta de que el fomento de estas competencias no se estaba generando, pese a que el desarrollo de las mismas es condición necesaria para el aprendizaje de las matemáticas ya que, entre otras, según el ICFES (2014), los estudiantes deben ser capaces de "construir o identificar argumentaciones válidas; usar adecuadamente ejemplos y contraejemplos; distinguir hechos de supuestos y reconocer falacias"

En correspondencia con las preocupaciones comunes al grupo general de docentes, encontré eco en planteamientos hechos por Cecilia Crespo, profesora argentina, experta en matemática educativa (2005), particularmente cuando manifiesta que "es necesario que los niños aprendan a intuir, plantear hipótesis, hacer conjeturas, generalizar y cuando sea posible, ensayar pequeñas argumentaciones y demostraciones, aunque sin exigencia de formalización." Esta idea me llevó a concluir, que para que el conocimiento matemático pudiese trascender en la vida de los estudiantes y tomar un sentido práctico, era necesario preguntarse por la adecuación de nuestras prácticas pedagógicas. Reconozco cómo a partir de esta adecuación en el quehacer del maestro y tomando como centro de interés de nuestra tarea, el fortalecimiento de los procesos necesarios para el desarrollo del pensamiento a partir de las matemáticas y no simplemente sus contenidos temáticos, el docente podrá guiar a los estudiantes por un camino que les generará un aprendizaje significativo, práctico y trascendente en su vida cotidiana. Esta inquietud me llevó a considerar propuestas didácticas que, en correspondencia con Cecilia Crespo (2005), permitieran al estudiante “hacer proposiciones para mostrar el carácter de verdad de estas que lo conlleve a la argumentación”.

Es así como los docentes nos vemos en la necesidad de fortalecer competencias que sean transversales para el estudiante, enfocadas en ir más allá de leer bien. Esto debe llevar a nuestros estudiantes a desarrollar cierto inclinación por el ejercicio intelectual: “… hacernos preguntas a nosotros mismos como estudiantes es esencial al aprendizaje profundo” (ELDER, pág. 47). Alcanzar este aprendizaje cada vez más profundo implicará que el estudiante desarrolle capacidad de análisis y pueda conectar lo aprendido con su vida, relacionando temas que al parecer no están inicialmente conectados. El desarrollar la habilidad de abstraer el conocimiento de forma aguda, le permitirá tener una perspectiva del mundo más crítica, más analítica, lo que lo llevará a forjar disposiciones intelectuales, que le permitirán tener bases sólidas para que con el paso del tiempo y al adquirir mayores conocimientos, pueda profundizar y analizar cada vez mejor su entorno. El objetivo de fomentar el conocimiento de manera crítica le brinda la posibilidad de convertir este carácter intelectual en un buen hábito.

Se reconoce que buena parte de las prácticas pedagógicas en el aula que se realizan hasta el momento, hacen énfasis en el desarrollo consecutivo de temáticas, que si bien buscan alcanzar la aprehensión de conceptos y habilidades propias de la asignatura y las habilidades operativas, dejan de lado la posibilidad de fortalecer el carácter intelectual en la clase de matemáticas. Son escasas las oportunidades en las que se busca generar espacios de análisis, formulación de hipótesis y dialogo entre el estudiante y el docente y posibles enunciados partiendo de ejercicios o de planteamiento de problemas.

1.2 Antecedentes del problema

Los antecedentes de la investigación se concibieron a través de la revisión de algunas tesis de maestría o doctorado con una vigencia no mayor a diez años, organizadas en tres ejes teóricos:

1.2.1 Enseñanza para la comprensión (EpC)

Para contextualizar la investigación en términos de alcances, es importante hacer la referencia a algunos estudios anteriores sobre el uso del marco de EpC en el ámbito internacional, nacional y local. Los estudios internacionales son dos, uno en Argentina y otro en España, mientras en el contexto local, se estudia una investigación en la ciudad de Pasto. En el campo internacional se evidenció que algunos docentes han aplicado el modelo de EpC. El ejemplo es la docente Paula Pogré en Argentina, que escribió un artículo, producto de su investigación sobre la utilización de la EpC en 2007. En este artículo, parte de un libro escrito por ella, ¿Cómo enseñar para que los estudiantes comprendan? (2007), ella establece las directrices para trabajar con este modelo pedagógico. Es importante mencionar que esta investigación es sobre cómo aplicar la EpC en cualquier campo de conocimiento. Pogré argumenta que la comprensión es una forma de funcionamiento que se desarrolla con la ayuda de un contexto de conocimiento. En el artículo mencionado describe pruebas sobre la estructura y los detalles del modelo y cómo un docente podría aplicarlo en la clase. Por ejemplo, menciona ella que la comprensión es un proceso que debe ser evidente en el funcionamiento de los estudiantes y en la asimilación de los temas y contenidos desarrollados en una clase. Así, el docente tiene que desarrollar actividades apropiadas, basándose en las directrices propuestas por los principios de la EpC.

Por otra parte, es evidente en los resultados de esta investigación cómo el docente debe aplicar el modelo de EPC, que debe basarse en tres preguntas: a) ¿qué quiere el docente que los estudiantes aprendan? b) ¿cómo sabe el docente que los estudiantes comprenden? y, c) ¿cómo hacen los estudiantes para saber que ellos comprenden? Estas preguntas son los elementos conductores que ayudan al docente a estructurar las clases. Como conclusión, este estudio enriquece la oferta corriente que encontramos acerca del uso de un modelo de enseñanza, porque Pogré da algunas sugerencias y resultados muy útiles sobre el uso de la EpC en clases. Por ejemplo, ella recomienda secuencias apropiadas para diseñar una clase bajo los principios de la EpC.

Otro estudio internacional es el publicado en *La Nueva Revista Iberoamericana de Educación*, en el que Rosa Vázquez Recio (2011) publicó los resultados de una investigación hecha en una escuela de granja llamada Bolonia en Cádiz, España. Esta investigación mostró cómo al aplicarse la EpC en el diseño de las clases, el docente tiene un apoyo en la mejora de la comprensión de los estudiantes y en convertir el estudio en algo significativo para los pupilos. La investigación presenta algunas características sobre el modo en que los docentes adoptan el modelo y el trabajo con él; las clases, estructuradas a partir de los pasos de la EpC, mostraron después de tres meses cómo los estudiantes mejoraron su comprensión.

Los docentes, asimismo, practican habilidades que toman como referencia la vida diaria y sus diversas situaciones, y de este modo hacen evidentes las bondades de seguir el modelo de EPC para diseñar sus clases. Esto quiere decir que el docente, al contextualizar las clases con un asunto común para los estudiantes, les proporciona espacios de práctica y oportunidades de expresar lo que ellos piensan acerca de determinado ejercicio, el docente tiene puede supervisar sus avances y resultados en relación con la comprensión alcanzada y el fomento de la misma. Se puede concluir que la aplicación de la EpC permite a los docentes trabajar con elementos muy cercanos al contexto de los estudiantes, a la vida diaria y que resultan ser muy conocidos por ellos; lo cual favorece y fomenta la manera de comprender la información ofrecida por el docente en el aula. Acá evidenciamos otro aspecto fuerte de la EpC, tomar elementos de la vida diaria para ayudar a comprender y entender un nuevo conocimiento en la vida de un estudiante.

En el contexto nacional se revisó la investigación realizada por María Betancourth y Elizabeth Madroñero (2014) desarrollada en Pasto, Nariño. Este estudio tenía como objetivo general determinar la eficacia de la EpC como la alternativa didáctica para mejorar la interpretación, y las habilidades en los estudiantes de quinto grado en la escuela Centro Educativo Municipal La Victoria, de Pasto. Después de la revisión de esta investigación se evidenció cómo la aplicación de los principios de la EpC se lograron resultados satisfactorios en el proceso de aprendizaje de los estudiantes y cómo ellos dieron muestras de su comprensión de los temas ofrecidos en clase. Una de las conclusiones de la investigación hecha por Betancourth y Madroñero es que el modelo EpC realmente tiene una gran eficacia y permite un amplio rango de beneficios tanto al educador como a los estudiantes, ya que ellos mejoraron su nivel intelectual, como por ejemplo, en la escritura, la lectura, la comprensión de ejercicios y los resultados de las actividades.

1.2.2 Fomento y desarrollo del pensamiento en matemáticas

Con relación a la revisión de antecedentes en el fomento y desarrollo del pensamiento en matemáticas, se presentan algunos encontrados en el contexto internacional, en México y en Ecuador, mientras que en el contexto local se encontraron estudios realizados en Manizales y Bogotá. El estudio realizado en México fue hecho por Sergio Osuna y fue titulado "El aprendizaje de las matemáticas en alumnos de ingeniería electrónica del instituto tecnológico de Mazatlán, Sinaloa." (2008). Este estudio tenía como objetivo describir los procesos de pensamiento matemáticos vistos como un proceso en el cual se vinculan conocimientos adquiridos y cimentados anteriormente, con los conocimientos nuevos, generando un significado nuevo y especial, que llegan a ser significativos en su proceso.

Para validar esta afirmación, Osuna se basa en los postulados de Ausubel acerca de cómo la rapidez y la meticulosidad con los que una persona aprende, dependen de dos factores, el primero, el grado de relación existente entre los conocimientos anteriores y el material nuevo y el segundo, la naturaleza de la relación que se establece, entre la información nueva y la antigua. El estudio parece confirmar que si el conocimiento llega a ser significativo en el estudiante, la información va a ser duradera en su proceso de aprendizaje y cómo al crear asociaciones temáticas el estudiante va a asimilar más fácil la información que se presente por primera vez.

Del mismo modo, el autor privilegia el uso de herramientas que favorezcan el pensamiento matemático, tales como mapas conceptuales y diagramas, los cuales buscan organizar la información que se busca ofrecer, aprender o practicar. Finalmente se sugiere como propuesta de esta investigación, motivar a los estudiantes el trabajo de la asignatura de matemáticas de manera creativa en el aula, empleando diversas estrategias y herramientas, teniendo en cuenta los aliados tecnológicos actuales que pueden resultar amigables y familiares para los estudiantes.

El estudio publicado en Ecuador se titula "Evaluación de un programa para el desarrollo del pensamiento formal en estudiantes del décimo año de educación básica de la unidad educativa "Tumbaco" de la ciudad de Quito", y fue realizado por Guillermo Vallejo Villacís, en 2011. Esta propuesta se sustenta en la evolución del pensamiento según la taxonomía cognitiva de Jean Piaget: 1) razonamiento proporcional, 2) control de variables, 3) razonamiento probabilístico, 4) razonamiento correlacional, y 5) razonamiento combinatorio. Siguiendo estas etapas el ser humano analiza y lleva a cabo operaciones formales. Basado en este postulado teórico, Vallejo busca proponer una serie de estrategias que mejoren el pensamiento formal aplicable a las matemáticas en estudiantes de grado décimo, que han tenido ciertas dificultades durante el proceso de trabajo de la asignatura. En esta propuesta el autor también privilegia de forma enfática a los conocimientos posteriores como elemento base para generar nuevas asociaciones cognoscitivas en el estudiante. El autor logra crear una propuesta que propicia la modificabilidad cognitiva de los estudiantes, e incluso de los mismos docentes a quienes les sugiere evitar etiquetar a los estudiantes cuando tengan dificultades o limitaciones al realizar procesos de pensamiento. Concluye sobre la conveniencia de propiciar el uso de operaciones formales que generen análisis en los estudiantes, pero también destaca la necesidad de fomentar la comprensión, la argumentación y la respuesta de los problemas planteados.

En el contexto local se encontró un primer estudio realizado en Manizales titulado "Dificultades que identifican los estudiantes a través de la metacognición en el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria" realizado por Erika Quintero, en 2014. Esta propuesta buscaba reconocer, identificar e interpretar las dificultades que tenían los estudiantes en educación media con relación a las matemáticas. Quintero evidenció que algunas dificultades que aluden los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, tienen que ver con la ausencia de metacognición y la escasa autorregulación de los estudiantes durante su proceso de aprendizaje; en muchos casos los estudiantes no planifican su proceso de trabajo, lo que podría llegar a limitarlos o crearles dificultades. También se evidenció en esta investigación, que los estudiantes no supervisan sus procesos de aprendizaje ni tienen en cuenta cuándo pueden superar el problema presentado; sencillamente, si no pueden resolverlo, lo obvian o lo olvidan.

La matemática en procesos de pensamiento ha brindado especial lugar a la memorización, menciona Quintero, y a una dependencia en las herramientas, como la calculadora, pero para la realización de ejercicios, procedimientos y tareas matemáticas parece haber muchos vacíos y dificultades. La propuesta concluye con la realización de actividades matemáticas que fomenten el análisis y la comprensión de ejercicios y problemas, evitando brindar posibilidades de respuestas u opciones e igualmente solicitando al estudiante un resultado más cualitativo de su ejercicio.

El segundo estudio se realizó en Bogotá en el 2013. Silvia Mendoza y Julián Pabón, sus autores, lo titularon “Propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en niños de 5 años”. Los investigadores se enfocaron en trabajar con una población de estudiantes de preescolar, pertenecientes al Colegio Bilingüe Real Americano, y buscaron estudiar la posibilidad de fomentar las nociones básicas de clasificación, seriación y del concepto de identificación de atributos del pensamiento lógico-matemático a partir de la creación de un material didáctico que favorecía el pensamiento lógico-matemático de los estudiantes y su desarrollo en proyectos de aula o micro-proyectos según el objetivo o alcance del contenido temático. Fundamentados teóricamente en Jean Piaget y su teoría de desarrollo cognitivo, Wachs y Condemarín quienes hablan acerca de las operaciones lógico-matemáticas y la mediación del pensamiento en las mismas, basándose igualmente en Lilia de Menegazzo, Labinowicz, Lovell, Szeminska y Furth, autores que analizaron la teoría de Piaget con relación al fomento de la lógica y el pensamiento lógico-matemático.

El estudio compila una serie de recomendaciones pedagógicas a los docentes, que están enfocadas a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, mejorar las estrategias de trabajo con los estudiantes, llevar a cabo un mejor diseño de herramientas y enfocar las actividades en el estudiante y sus necesidades y no únicamente en el docente. Sus resultados evidencian que el proceso de argumentación de los resultados en ejercicios matemáticos es un paso necesario y vital para que el estudiante comprenda e interprete mejor el desarrollo de operaciones.

1.2.3 Uso y aplicación del software GeoGebra

Resultados frente al uso del software GeoGebra a nivel internacional se evidenciaron en países como Argentina y Perú; a nivel local encontramos resultados en Medellín y Barranquilla. La propuesta de Argentina fue creada por la investigadora Nancy Debárbora y la tituló “El uso del GeoGebra como recurso educativo digital en la transposición didáctica de las funciones de proporcionalidad”, en el año 2012. Esta investigación tenía como objetivo trabajar, en contextos educativos de estudiantes de secundaria, la temática de funciones de proporcionalidad mediadas por el uso del software GeoGebra, y trabajar la asignatura de matemáticas ofreciendo métodos o técnicas diferentes a las empleadas de manera tradicional o repetitiva en las clases. Debárbora propone evaluar el desarrollo de diferentes estrategias de trabajo pedagógico que mejoren los procesos de análisis y comprensión de ejercicios de las funciones de proporcionalidad y los resultados de los mismos, por medio del software GeoGebra. Busca poner a prueba una serie de propuestas en las cuales el docente desempeña un rol de mediador, pero los estudiantes realizan actividades de exploración y ponen en juego, técnicas y justificaciones, de manera espontánea y fácil. Los resultados de este estudio señalan que esta propuesta de investigación facilitó los procesos de enseñanza aprendizaje para el docente y en los estudiantes los de análisis, solución e interpretación de resultados de ejercicios de funciones de proporcionalidad.

Por su parte, la investigación llevada a cabo en Perú, desarrollada por Judith Bello, quien se titula, “Mediación del software GeoGebra en el aprendizaje de programación lineal en alumnos del quinto grado de educación secundaria”. La propuesta buscaba enseñar a los estudiantes nociones básicas e intermedias de programación lineal, demostrando que la manera tradicional de trabajar con lápiz y papel no es la única que genera resultados positivos en el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes. La autora decidió emplear GeoGebra, en lugar de otras opciones de software, porque permite que los estudiantes puedan manipular, conjeturar, esbozar y plantear posibles soluciones, mientras construyen el conocimiento sobre algún tema y transitar por los registros de representación verbal, algebraico y gráfico de manera natural y espontánea.

Los constructos teóricos empleados para generar la propuesta fueron la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) y el método de investigación propuesto era cualitativo, basado en Hernández, Fernández y Baptista (2007). La propuesta alcanzó resultados satisfactorios, ya que los estudiantes lograron emplear el software y elementos de enseñanza tradicional de forma combinada, demostrando ambas posibilidades de trabajo como una ruta de trabajo posible, aunque la mediación de la herramienta tecnológica favoreció de manera notoria la resolución de problemas de programación lineal por medio de GeoGebra, demostrando un manejo y apropiación temática exitosa y correcta.

Los resultados locales fueron en Medellín y Barranquilla. La investigación desarrollada en Medellín fue elaborada por Luis Daza López, quien la tituló "Interpretación de la factorización a través del uso del GeoGebra", en el año 2012. El investigador trabajó con estudiantes de grado octavo de bachillerato, y como objetivo se buscaba facilitar la apropiación de conceptos algebraicos y matemáticos en los estudiantes, para facilitar la enseñanza de la factorización por medio del uso de una herramienta tecnológica, GeoGebra. El investigador había identificado en los estudiantes falta de significación conceptual, una cierta carencia de habilidades operativas básicas y falta de estructura en los conocimientos de matemáticas, situación que afectaba completamente el análisis y la comprensión algebraica.

Como resultado, la investigación evidenció que la mediación del software GeoGebra en las aulas de clase, permitió abordar las debilidades en la destreza operativa necesaria para resolver ejercicios, y generar confianza en el estudiante para proponer estrategias que le permitieran abordar la interpretación de la factorización desde de la mirada de la geometría. La factorización fue comprendida mejor por los estudiantes y así los docentes lograron apropiarse de una herramienta bastante útil para el proceso de enseñanza aprendizaje.

El último proceso investigativo consultado fue desarrollado en Barranquilla por Carlos Torres Rodríguez y Deris Racedo Lobo y lo titularon "Estrategia didáctica mediada por el software GeoGebra para fortalecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría en estudiantes de 9° de básica secundaria." La intención de esta investigación era determinar el impacto en la aplicación del software GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas, ofreciendo una alternativa metodológica para los docentes y para facilitar el aprendizaje de sus estudiantes. Los autores proyectaron una serie de intervenciones que fueron satisfactorias en su proceso investigativo y que lograron demostrar que GeoGebra es una estrategia didáctica que no solo fortalece la enseñanza-aprendizaje del área de geometría, sino que contribuye al mejoramiento de las competencias lógico-matemáticas en el ejercicio analítico de los estudiantes. Adicionalmente los investigadores mencionan que el uso de GeoGebra facilitó la materialización de los sólidos y las figuras empleadas en los ejercicios geométricos más allá de la simple enunciación, análisis y resolución de problemas.

1.3 Contexto y justificación del problema

La educación en Colombia, especialmente en el área de matemáticas, no ha obtenido buenos resultados. Esto se evidencia en pruebas internacionales como la de PISA, en la cual en el 2012 el país resultó en el puesto 61 entre 65 países evaluados. La cantidad de estudiantes que logró niveles superiores (obteniendo un nivel 5 o 6) en el resultado de la prueba es prácticamente cero: un escaso 0.3%, comparado con un 12% del promedio de otros países, tal como muestra la figura 1.

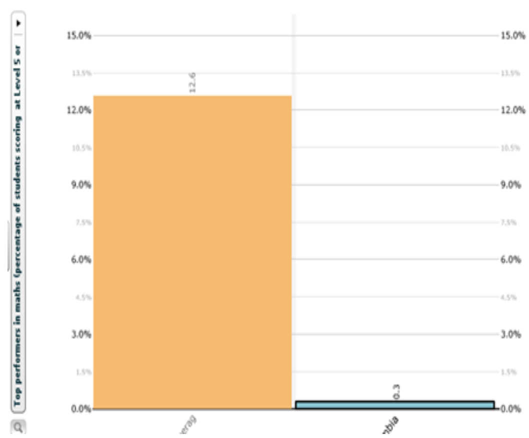


Fig.1 Rendimiento en matemáticas pruebas PISA 2012 (ref. http://gpseducation.oecd.org/CountryProfile?primaryCountry=COL&treshold=10&topic=PI)

Al preguntarse el porqué de estos resultados, me atrevo a sugerir como causas probables: 1) la obnubilación de los estudiantes, la cual es un estado que experimenta el ser humano en donde la conciencia llega a su mínima expresión y la confusión está presente de manera constante. De igual modo, puede ser generada por diferentes distractores entre los cuales encontraremos las redes sociales y aparatos tecnológicos, y 2) un escaso entrenamiento en la formación de competencias propias del razonamiento intelectual, entre las que caben el pensamiento crítico y la argumentación, 3) poca confianza o interés en pensar bien. Falta probablemente desarrollar habilidades interpretativas, propositivas y argumentativas que generen en los estudiantes un carácter intelectual que los lleve a buscar soluciones a problemas, usando sus conocimientos conceptuales y habilidades operativas para defender y persuadir a los demás respecto a sus ideas.

Del mismo modo, se puede evidenciar que al carecer de ese carácter intelectual los estudiantes encontrarán dificultades no solo en la interpretación de los contextos que les proporcionan los enunciados de los cuestionamientos, los escritos y los diferentes textos discontinuos (como tablas estadísticas o gráficas) que se les presenten en cualquier situación, sino que no se verán inclinados a resolverlas. Como resultado de la unión de estos dos factores los estudiantes no aprovechan las clases que reciben y no desarrollan su potencial intelectual.

Para corregir esta situación consideré que se puede sacar partido del interés de los estudiantes en las nuevas tecnologías como un factor motivante para prestar atención en clase. Al ser aplicadas en un tema de estudio como la geometría, puede esperarse que se logren desarrollar competencias que fortalezcan su interés por el ejercicio intelectual y este los lleve a ampliar sus disposiciones para pensar de manera crítica y analítica.

La aplicación del proyecto de Educación Media Fortalecida en Matemáticas propició la reflexión de los docentes del equipo de matemáticas acerca de qué podían hacer desde los diferentes campos del conocimiento para ser consecuentes con este y obtener los resultados esperados. El camino para responder a la pregunta comenzó con la necesidad de producir una reorganización curricular por ciclos y se apuntó entonces a la transformación de las prácticas pedagógicas en las que se integrarían todos los campos del conocimiento mediante un tópico generativo, la cual es la ruta para potenciar el desarrollo de pensamiento matemático en sus diversas formas. La inquietud de los docentes de matemáticas llevó a los docentes de los diferentes campos del conocimiento a preguntarse si el desarrollo del pensamiento matemático se estaba potenciando en las clases. La respuesta fue que al interior del campo del conocimiento matemático dicho proceso no se estaba dando, pese a que es una condición necesaria para el aprendizaje de las matemáticas. Así, mucho menos se podría pensar en conseguir estudiantes matemáticamente competentes. Las competencias matemáticas no se desarrollan de manera aislada ni se obtienen *per se*, ni se pueden desarrollar únicamente mediante la ejercitación de los estudiantes en problemas matemáticos descontextualizados y poco significativos en la solución de problemas. Tal como lo expone el ICFES (2014) “las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencias más y más complejas” (p 49).

El uso de programas de computador permite a los estudiantes construir diagramas precisos e interactuar con ellos para abstraer propiedades generales y relaciones (Hollebrands, 2010). Este tipo de actividades interactivas lleva al estudiante a formularse preguntas complejas al intentar dilucidar los principios involucrados en los diagramas que construyen. Interpretar cuestiones profundas como, por ejemplo, encontrar principios y conceptos relacionados, implicados en la construcción de árboles pitagóricos, usando una herramienta con la cual, por medio de la interacción, pueden evidenciar errores en cada etapa del proceso, observar el resultado y compararlo con el de compañeros, puede permitirle a los estudiantes generar preguntas que lleven a un consenso entre sus interpretaciones y las opiniones de sus compañeros.

Linda Elder y Richard Paul (2002) afirman que: “cuando tomamos el tiempo de clarificar una pregunta, estamos más capacitados para contestarla. Tenemos claro para nosotros mismos cuál es la tarea intelectual y qué requiere esa tarea de nosotros” (p.31). Por lo tanto, las tareas y las preguntas que se plantean a los estudiantes a través de las tareas tienen un papel importante para generar experiencias que enfoquen su pensamiento cuando tienen en qué pensar, ya que las preguntas esenciales son una invitación a contestarlas. Formar en el hábito de formular preguntas adecuadamente puede conducir a los estudiantes al éxito académico y posteriormente a una vida más plena.

1.4 Pregunta de investigación

El desarrollo competencias y pensamiento matemático es una prioridad para el colegio Prospero Pinzón I.E.D. cuyo proyecto educativo institucional (P.E.I.) pretende posicionar a la institución como líder en la localidad con la educación media fortalecida en matemáticas. Esta competencia va más allá de la simple resolución de algoritmos y desarrollo de ejercicios, sino que lleva a la reflexión sobre una tarea significativa y el proceso creativo y académico que rodea a la misma. Esta disposición es llamada carácter intelectual, que genera en los estudiantes un mayor compromiso con su trabajo académico, es la base para el desarrollo del pensamiento y lleva al estudiante una competencia matemática que responda a las expectativas de la institución y del docente. De allí que, como pregunta en el docente investigador surge:

¿Qué rasgos del carácter intelectual (Ritchhardt, 2002) en el desarrollo del pensamiento matemático pueden percibirse a partir de una tarea de geometría mediada por el software GeoGebra en el caso de dos estudiantes de grado décimo del Colegio Próspero Pinzón IED?

1.5 Objetivo General

Describir rasgos del carácter intelectual en el desarrollo del pensamiento matemático de dos estudiantes de grado décimo del Colegio Próspero Pinzón IED a partir de una tarea de geometría mediada por el software GeoGebra.

1.6 Objetivos Específicos

a) Identificar los atributos del carácter intelectual de dos estudiantes del grado décimo del colegio Próspero Pinzón IED.

b) Establecer el nivel de desarrollo de las temáticas de una tarea de geometría para el desarrollo del carácter intelectual en dos estudiantes del colegio Prospero Pinzón IED.

c) Evaluar la tarea geométrica mediada con el software GeoGebra para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático a través del desarrollo del carácter intelectual en dos estudiantes del Colegio Próspero Pinzón IED.

CAPÍTULO II

Marco Referencial

El marco referencial se encuentra dividido en las siguientes categorías temáticas: pensar matemáticamente, carácter intelectual, pensamiento visible, Enseñanza para la Comprensión, GeoGebra para la solución de problemas.

2.1 Pensar Matemáticamente

El pensamiento matemático ha sido crucial para la humanidad desde que Pitágoras dejó registros de sus logros. Este ha venido evolucionando con el tiempo, a tal punto que ha permitido a la humanidad lograr grandes avances en ciencia y tecnología. Sin embargo este pensamiento matemático no se alcanza por “generación espontánea”, debido a que se requiere de ciertos ambientes de aprendizaje que estén enriquecidos por problemas a resolver, como lo indica el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 4)[1]. Es primordial identificar las bases y herramientas para lograr el adecuado desarrollo de este pensamiento matemático y, “… construir contextos y situaciones que permitan avanzar hacia las matemáticas formales.”(MEN, 79).

Inicialmente debemos reconocer que las matemáticas se relacionan con el “desarrollo del pensamiento racional” (MEN, 1), lo cual conlleva a una abstracción del entorno físico por medio de un razonamiento lógico que debe ser riguroso y preciso. Para lograr este pensamiento racional, el individuo debe tener preguntas a las cuales pueda dar respuesta o por lo menos se acerque a lograr una solución definitiva. Sin estas preguntas no se lograría “pensar en algo y volver a pensarlo. Uno debe hacer las preguntas necesarias para pensar lógicamente sobre eso, con claridad y precisión” (Paul, 2002).

Entonces, si lo primordial es el lograr una enseñanza de las matemáticas, que permita pensar racionalmente, “para enseñar y aprender matemáticas es imprescindible que en el aula de clase se propicien ambientes donde sea posible la discusión de diferentes

[1] Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, pág. 4.

ideas para favorecer el desarrollo individual de la confianza en la razón como medio de autonomía intelectual" (MEN, 5). El logro de esta autonomía intelectual se debe ir evidenciando evidenciando en el empoderamiento de conceptos, los cuales son abstracciones del mundo físico, que logran unir diferentes procesos mentales que permiten plantear, gestionar y proponer soluciones en el estudiante. Para lograr la abstracción del mundo físico el MEN ha identificado diferentes tipos de procesos dentro del pensamiento matemático: "formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular-comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos" (MEN, 51). Estos procesos parecen ser esenciales para generar un punto de partida para el estudiante a la hora de resolver problemas y plantear hipótesis partiendo de datos matemáticos. Cabe aclarar que estos no pueden darse de forma aislada, ni mucho menos enseñarse puntualmente, ya que unos y otros son transversales.

Como cada proceso es un eslabón dentro de una cadena, la cual puede repetirse infinitamente, es necesario que estos estén acordes con las necesidades que el mundo actual requiere. Históricamente, a nivel nacional, la enseñanza de las matemáticas como se concibió "desde los inicios de la República hasta la década de los setenta" (MEN, 46) se veía como algo estable e infalible, con verdades absolutas, inmutables, lo que llevó a que la enseñanza solo se limitara a fomentar la memorización de contenidos matemáticos (postulados, axiomas, definiciones, teoremas, etc.) para luego aplicar algoritmos (fórmulas) que permitieran ejercitar y recordar lo aprendido; esto es actualmente insuficiente y no responde a las necesidades reales del estudiante.

El aprendizaje memorístico, promovido por una "enseñanza orientada hacia el logro de objetivos específicos relacionados con los contenidos del área y hacia la retención de dichos contenidos" (MEN, 49) debe transformarse y adaptarse a las necesidades actuales para poder apoyar a los estudiantes en el desarrollo de sus competencias matemáticas, las cuales no deben estar aisladas del resto del conocimiento, como por ejemplo de las ciencias naturales o sociales. Es decir que debe existir un cambio de paradigma dentro de la enseñanza, en donde los docentes sean capaces de reflexionar, explorar, indagar e investigar acerca del nuevo modelo epistemológico para dar significado al *ser matemáticamente competente*, como lo indica el MEN en su planteamiento de estándares matemáticos.

Así, buscar una educación que lleve a un estudiante a *ser matemáticamente competente* implica replantear la postura tradicional frente a las matemáticas, ser crítico frente a estas, ser consciente de que no son inmutables, de que existen problemas abiertos, los cuales nos invitan a conocerlos, pensarlos y quizás solucionarlos. Para poder abarcar estas situaciones (MEN, 73)[2] es necesario que el docente logre en el aula de clase un aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas, haciendo que el estudiante sea partícipe de este, no como un sujeto pasivo, el cual recibe conocimiento sin preguntarse el porqué de su utilidad, sino de un sujeto activo, el cual explora, relaciona e indaga constantemente sobre el conocimiento recientemente adquirido. En este caso dicho conocimiento va hasta grado noveno en donde se pueden evidenciar así los cinco tipos de pensamiento matemático organizados por los estándares:

• **Pensar con los números.**

Trabaja con los números reales en sus diferentes representaciones.

Expresa de forma sencilla y práctica cantidades muy grandes o muy pequeñas y para ello utilizo la notación científica.

Representa diferentes situaciones con potenciación y radicación.

Cuando en un problema interviene un número real que no se puede representar con una fracción (por ejemplo raíz cuadrada de dos, π), puedo decidir si lo represento así o como un decimal.

• **Pensar con la Geometría**

Hago conjeturas sobre congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre sólidos; me doy cuenta si son ciertas o falsas.

Resuelvo y formulo problemas con criterios de congruencia y semejanza entre triángulos ¡no olvido justificar mi respuesta!

Entiendo los teoremas de Tales de Mileto y de Pitágoras y los utilizo para reconocer y comparar propiedades y relaciones geométricas.

[2] "Por situación se entiende el conjunto de problemas, proyectos, investigaciones, construcciones, instrucciones y relatos que se elaboran basados en las matemáticas, en otras ciencias y en los contextos cotidianos y que en su tratamiento generan el aprendizaje de los estudiantes." (MEN, 73)

Puedo hacer una demostración práctica (como un rompecabezas) del Teorema de Pitágoras, utilizando relaciones entre áreas; lo verifico ¡ese Pitágoras era un duro!

Utilizo representaciones geométricas para resolver y formular problemas aritméticos

(cuarta y media proporcional, por ejemplo) y en otras clases de situaciones y condiciones.

• **Pensar con las medidas**

Con las herramientas que ya tengo, descubro fórmulas y procedimientos para encontrar áreas y volúmenes.

Selecciono las técnicas y los instrumentos precisos para medir magnitudes y justifico mi selección.

Resuelvo y formulo problemas en los que se relacionen magnitudes de figuras planas y de sólidos.

• **Pensar con la organización y clasificación de los datos**

Comprendo que hay muchas formas de presentar una misma información (listados, diagramas de árbol), esto puede dar origen a distintas interpretaciones. Ojo: tengo en cuenta qué quiero expresar con la información recogida.

Con lo que sé de estadística, ya puedo interpretar críticamente información que me llega de diferentes fuentes, valiéndome de conceptos como media, mediana y moda.

Reconozco diferentes métodos de estadística y según la situación, decido cuál utilizar.

Analizo los datos que obtuve de un experimento utilizando los conceptos de probabilidad que ya manejo (espacio muestral, evento, independencia); soluciono y

planteo problemas con los datos más importantes que haya seleccionado, e incluso, puedo inventarme un juego.

• **Pensar con variaciones y álgebra**

Identifico las relaciones que hay entre las ecuaciones algebraicas y su representación gráfica (ecuación lineal / línea recta, ecuación cuadrática / parábola).

Si me dan una expresión algebraica, soy capaz de encontrar otras equivalentes.

A partir de un caso particular, llego a una conclusión general (inducción) para verificar conjeturas; lo expreso en un lenguaje algebraico.

Represento gráficamente funciones lineales, cuadráticas y cúbicas y elaboro modelos para su estudio.

Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales; hay muchos caminos para llegar a una misma meta.

Interpreto el significado de la pendiente en situaciones de variación (velocidad / distancia, productos / costos).

Analizo que una familia de funciones tiene parámetros comunes.

Represento gráficamente funciones polinómicas, racionales y exponenciales y saco conclusiones[3].

Para desarrollar estos cinco tipos de pensamiento, el MEN propone que se deben diseñar tareas matemáticas en donde la pregunta genere muy fácilmente en los estudiantes la curiosidad y una reflexión meta cognitiva. Se debe cambiar el paradigma de la enseñanza actual en las matemáticas a partir de la selección de las situaciones que se provoquen en el aula de clase, el cual lleve a los estudiantes a tomar decisiones y "exponer sus opiniones y ser receptivos a las de los demás; generar discusión y desarrollar la capacidad de justificar las afirmaciones con argumentos" (MEN, 74). El generar discusión permite que haya un ambiente creativo, que promueva el cuestionamiento de los conceptos, que se puedan realizar *preguntas de procedimiento* que conlleven a *preguntas de juicio*, como lo define Paul (2002)[4]. Pero para que este ambiente no esté coartado, el docente debe evitar que los estudiantes tomen posturas absolutistas dogmáticas o relativistas. Las primeras reducen todas las preguntas a asuntos de hecho, creen que hay una única respuesta correcta, y las segundas reducen todo a opiniones subjetivas. "Ni los absolutistas ni los relativistas dejan lugar para lo que es crucial al éxito de la vida humana: asuntos de juicio razonado" (Paul, 2002).

Es indispensable que el docente tenga claro que en bien del fomento del pensamiento matemático en los estudiantes, debe promover las diferentes competencias del

[3] Estándares de matemáticas para grado noveno diseñados por el Ministerio de Educación Nacional.

[4] Preguntas de procedimiento (establecida o de un sistema): se resuelven con hechos, definiciones, o los dos. Preguntas de juicio (sistemas en conflicto): requieren razonar, pero con más de una contestación viable. Son preguntas que hace sentido debatir. (Paul, 2002)

estudiante, y permitirle alcanzar la claridad de que el saber cuestionar el conocimiento que adquiere, promueve la adquisición de un sentido crítico frente a los contextos matemáticos, los los cuales ayudan a la toma de decisiones informadas, propiciando la justificación de su elección elección bajo un pensamiento lógico y razonado, que pueda ser refutado o argumentado. Esto Esto lleva a que el estudiante pueda ejercer fuera del aula de clase una ciudadanía crítica. Paul propone para entender cómo promover el correcto cuestionamiento, reflexionar acerca de la siguiente estructura propuesta por el mismo autor.

> “Cuestionar la estructura del pensamiento:
>
> 1. Cuestionar metas y propósitos. 2. Cuestionar las preguntas. Todo pensamiento responde a una pregunta. 3. Cuestionar la información, los datos, y la experiencia. Todos los pensamientos presuponen una base de información. 4. Cuestionar inferencias y conclusiones. Todo el pensamiento requiere trazar inferencias, llegar a conclusiones, crear el significado. 5. Cuestionar conceptos e ideas. Todo pensamiento conlleva la aplicación de conceptos. 6. Cuestionar suposiciones. Todo pensamiento recae en las suposiciones. 7. Cuestionar implicaciones y consecuencias. Todo el pensamiento va dirigido hacia una dirección. 8. Cuestionar puntos de vista y perspectivas. Todo pensamiento toma lugar dentro de un punto de vista o un marco de referencia.” (Paul, 2002)

Es a partir de esta estructura que una unidad didáctica ha de ser formulada si pretende desarrollar adecuadamente un pensamiento matemático real en los estudiantes ya que permite a los estudiantes no sólo comprender y realizar algoritmos variados sino que lo lleva a cuestionarse sobre el conocimiento que están adquiriendo y sobre el proceso que los lleva a conseguirlo. En estos ocho puntos se deja claro que se deben cuestionar desde el propósito de aprender (en este caso), hasta el punto de vista que se tome frente a las situaciones matemáticas. El permitirle al estudiante cuestionarse sobre la estructura del pensamiento conlleva a que sea partícipe de su aprendizaje, a que lo tome en serio y realice preguntas cada vez más significativas y convierta esto en una cuestión rutinaria (Paul, 2002). El preguntar hace que el estudiante mida su nivel de pensamiento lógico, con lo que se supera la situación que “la mayoría de estos [estudiantes] permanecen sentados pasivamente en clase, deseando que el profesor no los llame, haciendo pocas preguntas” (Paul, 2002). Si el docente logra que sus estudiantes asistan a clase llenos de preguntas generadas por la lectura de sus notas de clase, o el libro guía, o de alguna discusión académica fuera del aula, está logrando el objetivo de hacer a sus estudiantes más competentes matemáticamente, y por ende promoviendo el pensamiento matemático, el cual ayuda a generar un *carácter intelectual*, que según Ritchhart es un término que abarca las relaciones entre pensar bien y productivamente, reconociendo las actitudes y la importancia de desarrollar ciertos patrones de comportamiento como lo es el saber cuestionar el conocimiento.

Teniendo las situaciones y actividades (MEN, 73)[5] dispuestas dentro del aula para generar un aprendizaje significativo, como lo definen Ausubel, Novak y Gowin, (Ausubel, 1973) se fortalece además la Enseñanza para la Comprensión, como lo explican David Perkins, Howard Gardner o Martha Stone Wiske, entre otros, permitiendo que los estudiantes logren "mejores comprensiones conceptuales, [con las que] van a poder desarrollar procesos de mayor complejidad y estarán en capacidad de enfrentar el tratamiento de situaciones de mayor nivel de abstracción." (MEN, 79).

El lograr concatenar el ambiente dentro del aula con los cinco procesos propuestos por el MEN, hace que los estándares den cabida a los "cinco tipos de pensamiento: (de Sexto a Undécimo): 1) Pensar con los números, 2) Pensar con la geometría, 3) Pensar con las medidas, 4) Pensar con la organización y clasificación de datos, y 5) Pensar con variaciones y álgebra." (Estándares de Matemáticas, 2). La transversalidad de estos pensamientos genera procesos claros de desarrollo de forma gradual e integral, que a lo largo del tiempo van aumentando el nivel de complejidad, logrando así mejorar las competencias matemáticas del estudiante a lo largo del proceso educativo.

2.2 Carácter intelectual

El desarrollo del pensamiento matemático viene ligado a la forma como se

[5] La actividad se refiere al trabajo intelectual personal y grupal de los estudiantes, tales como definir estrategias para interpretar, analizar, modelar y reformular la situación; formular preguntas y problemas, conjeturas o hipótesis; explicar, justificar (y aun demostrar) o refutar sus conjeturas e hipótesis; utilizar materiales manipulativos; producir, interpretar y transformar representaciones (verbales, gestuales, gráficas, algebraicas, tabulares, etc.); calcular con lápiz y papel o emplear calculadoras y hojas de cálculo u otros programas de computador; comparar y discutir resultados producidos con o sin computador; redactar y presentar informes, etc. (MEN, 73)

enseña la estructura matemática, ese andamiaje que el docente debe montar a lo largo del proceso de aprendizaje del estudiante. Sin embargo, como ya se ha discutido, la enseñanza enfocada en tener un pensamiento matemático, debería generar el poder ser *matemáticamente competente*, que si bien es algo relativo de acuerdo al punto de vista desde se mire, debe romper con el paradigma actual de la educación, pues implica pasar de lo meramente procedimental, mecánico, a un pensamiento que permite entender y resolver los problemas a los que se vea enfrentado el estudiante, haciendo que lo aprendido propicie las herramientas necesarias para abordar cualquier situación y que sea capaz de darle una posible solución y que tome decisiones racionales que le faciliten ampliar las “oportunidades de ser felices [y] tener éxito en la vida” (Paul, 2002),.

Ahora, al ser *matemáticamente competente* deben desarrollarse en el estudiante una serie de habilidades y actitudes que permitan como individuo ser más racional, convirtiéndolo en una persona intelectualmente responsable, como lo indica Paul, capaz de reconocer en su entorno “las preguntas de juicio por lo que son: preguntas que requieren la consideración de puntos de vista alternos” (Paul, 2002). Sin embargo lograr que el estudiante alcance ese nivel de desarrollo de habilidades, se logra si él tiene disposición para agudizar su intelecto, para lograr identificar estas preguntas, debe primero el generarse a sí mismo preguntas, ya que si no logra cuestionarse, su mente no se involucrará lo suficiente en el contexto al cual se ve enfrentado, y no habrá “un aprendizaje sustancial” (Paul, 2002), es decir estar dispuesto a interrogarse en lo que sabe.

El lograr que el individuo se cuestione a sí mismo, que tenga disposición al cambio, es un proceso que no se da instantáneamente, ya que debe tener un proceso que implica un nivel de conceptualización y abstracción del mundo que lo rodea, y en este caso las matemáticas cumplen una tarea dual, ya que son al mismo tiempo el medio y el fin para lograr el objetivo. Para ser *matemáticamente competente* deben desarrollarse actividades guiadas, unos “criterios intelectuales para evaluar el razonamiento. Estos criterios incluyen, pero no se limitan a, claridad, precisión, exactitud, relevancia, profundidad, extensión, lógica e imparcialidad.” (Paul, 2002), pero para poder lograr que el estudiante desarrolle estos criterios intelectuales, es preciso que esté dispuesto al desarrollo intelectual por medio de una guía activa, retadora y ante todo motivadora, ya que si la mente no se sumerge completamente en el proceso, no podrá gestarse un carácter intelectual.

Ahora, el estudiante que esté dispuesto a cuestionarse con ciertos criterios intelectuales, hace que pueda reflexionar y de este modo conceptualizar su entorno. Esto lleva en términos generales a que el estudiante sea más “inteligente”, ya que al poder generar preguntas sobre el conocimiento que posee o que está tratando de interiorizar, cree un canal de doble sentido, que facilita “un buen modelo mental o gráfico [que] permite al estudiante buscar distintos caminos de solución” (MEN, estándares básicos). Este modelo es característico de las personas que a lo largo de la historia de la humanidad han demostrado una agudeza intelectual, una brillante interpretación del mundo, y es por esto que catalogamos a estas personas como muy inteligentes. Sin embargo, no tenemos unos criterios unificados para designar a alguien con esta habilidad.

Décadas atrás ha habido personas dedicadas a resolver o por lo menos a tratar de estandarizar el concepto de “inteligencia”; si estamos en un entorno académico, y se realiza un sondeo a los estudiantes sobre qué consideran necesario para demostrar inteligencia, muy posiblemente relacionen el sacar buenas notas con esta, pero esto es apenas un parámetro subjetivo de medida, ya que quien califica determina quién es “inteligente” o no. Ahora si nos vamos a un entorno laboral, tal vez pueda relacionarse la inteligencia con la cantidad de problemas que pueda resolver un empleado en la oficina, algo que quizás sea proporcional a su salario, es decir que en forma global podemos determinar que quien es “inteligente” es una persona exitosa.

Hay numerosas variables subjetivas en este tema, sin olvidar el intento de estandarizar de forma cualitativa este concepto, por medio de un test llamado Coeficiente Intelectual -C.I.-, el cual mide la capacidad del individuo en dar solución a diferentes situaciones, de una forma clara y efectiva. Este test de inteligencia, como varias teorías, hace “énfasis en la presencia de habilidades mentales generales, eficiencia neuronal, procesos cognitivos, y habilidades específicas para pensar y aprender” (Ritchhart, 2002). Estas habilidades van ligadas generalmente al pensamiento matemático, a la facilidad con la que puedan resolver problemas de lógica, o abarcar situaciones donde se unen varios tipos de conocimiento que puedan generar un gran nivel de complejidad para considerar una solución a simple vista, pero más allá de esto, es la disposición de la persona a ir más allá del conocimiento básico. Este tipo de test excluye otras habilidades que pueda tener el individuo, y que muy posiblemente ayudan a que este sea más inteligente, o por lo menos más dispuesto para enfrentar la vida. Ahora lo que debemos preguntarnos frente a esta nueva posibilidad son varias preguntas, como ¿son acertados los test en determinar el nivel de inteligencia de una persona? ¿Qué otro tipo de habilidades fortalecen la inteligencia? ¿Cómo podemos estandarizar el concepto de inteligencia? ¿Cómo podemos medir el nivel de disposición para aprender?

El profesor Ritchhardt parte de la preocupación de que la escuela misma no está suficientemente comprometida con el desarrollo intelectual de sus estudiantes. Señala que a menudo los estudiantes sienten que se les niega su inteligencia natural o su curiosidad y que se ve el pensamiento creativo como algo misterioso, tortuoso e irritante (2002, xxi). Por eso propone que se cultiven hábitos mentales y disposiciones que alimenten el carácter del intelecto, de la misma manera que se puede alimentar el carácter moral. Detrás de este planteamiento subyace la idea de que si no se establece una sintonía entre lo emocional y lo intelectual difícilmente puede pensarse que en la escuela se desarrolle una inteligencia que vaya más allá de la solución de asuntos inmediatos. Para él se requiere de una conjunción de hábitos y patrones, así como de disposiciones generales hacia el pensamiento que no solo orienten, sino que también motiven las búsquedas orientadas a pensar.

Si el carácter intelectual puede considerarse como algo alcanzable es porque se plantea que la inteligencia puede relacionarse con el carácter y de este modo puede surgir, no de manera individual sino como algo que se aprende socialmente. También en la esfera escolar. Por esto deben encontrarse oportunidades en el aula que generen la posibilidad de que esta se ponga a prueba, se ensaye y se adquiera como un patrón flexible que se usa cuando se encuentra la oportunidad de hacerlo. Para esto se debe buscar la manera de generar patrones de comportamiento que alimenten las disposiciones al pensamiento. Estos patrones de comportamiento se activan en forma intencionada y controlada y no de manera automática. Las disposiciones parecen ser conjuntos de comportamientos generales que se despliegan según los contextos y motivan, dirigen y activan las habilidades (Ritchhardt, 2002,31). Tener carácter intelectual garantiza que no solo se es inteligente sino que se actúa de tal manera.

No es posible hablar de inteligencia sin referirse a la concepción de las inteligencias múltiples de otro de los profesores de la misma Escuela de Educación de Harvard, Howard Gardner. Muy reconocido a nivel mundial, asevera que todos los seres humanos están capacitados para el amplio desarrollo de su inteligencia, apoyados en sus capacidades y su disposición, además de establecer que existen indeterminadas habilidades que potencian el intelecto, y considera que esta "competencia intelectual humana debe dominar un conjunto de habilidades para la solución de problemas […] y también debe dominar la potencia para encontrar o crear problemas —estableciendo con ello las bases para la adquisición de nuevo conocimiento" (Gardner, 2001). Lo que implica que el ser inteligente no necesariamente es tener buenas notas en el colegio, o tener un buen sueldo en el trabajo, el ser inteligente es estar dispuesto a poder desarrollar las habilidades necesarias para dar solución a los problemas con los que se enfrenta el individuo. Adicional a esto, Gardner sostiene la necesidad de respetar formas de inteligencia diversas a partir de habilidades más o menos desarrolladas en cada ser humano, puertas de acceso al conocimiento, casi cercanas a lo que se conoce como talentos, y que se despliegan como inteligencias: lógico-matemática, espacial, lingüística, corporal-kinestésica, musical, interpersonal, intrapersonal y naturalística.

Sin embargo, tal y como el mismo Ron Ritchhardt lo describe, de forma generalizada y arraigada en nuestra cultura y nuestro mundo, se ha considerado siempre que la única inteligencia es la lógico-matemática, ya que "nosotros regularmente usamos palabras como curioso, abierto de mente, decisivo, sistemático, escéptico, juicioso, inquisitivo, estratégico, diligente, equitativo, reflexivo, y deliberante que describe a los individuos inteligentes" (Richhart, 2002). Así determinamos que aquellas personas que no desarrollan esta habilidad no son "inteligentes", lo que puede llevar a que un estudiante se indisponga y considere que no es *matemáticamente competente*, si no desarrolla un pensamiento matemático adecuado. Si nos salimos de este tipo de inteligencia y potenciamos las demás, aún con el fin de llegar a resolver un problema matemático, quizás se pueda lograr desarrollar la inteligencia lógico-matemática, ya que como sabemos el intelecto no es una habilidad aislada, y está compuesta de forma transversal al ser del individuo.

El lograr desarrollar el poder ser "inteligente", es lo que Ron Richhart (2002) describe como el poder desarrollar un *carácter intelectual*, lo que según él es una disposición, un hábito que perdura en el tiempo. Para él el carácter intelectual se manifiesta a partir de tres tipos de pensamientos, cada uno de ellos con manifestaciones precisas:

1. **Pensamiento creativo:** es el mantener una mente abierta: atreverse a ir más allá, considerar nuevas ideas, ensayar nuevas cosas y más que nada demostrar voluntad de considerar opciones alternativas. Además de tener curiosidad: no temer a imaginar y hacerle interrogaciones al mundo.
2. **Pensamiento reflexivo**: tener una metacognición: la cual es la capacidad de pensar sobre su propio pensamiento, y monitorear sus propios procesos de pensamiento. Implica ser consciente de los problemas que pueden aparecerle a su propio pensamiento y orientar el pensamiento hacia ciertas rutas.
3. **Pensamiento crítico:** es la búsqueda activa de la verdad y la comprensión, en vez de pensar lo que más le conviene. Se plantea varias posibilidades, indaga por evidencias y pone a prueba la validez de las respuestas. Tiene a disposición el uso de estrategias, y se pone metas, planea, y busca ser productivo. Por último, cultiva el escepticismo, ya que afirma, una sana dosis de escepticismo ayuda a evaluar mejor la información que se recibe. Es receptivo a nuevas ideas pero actúa con ojo crítico.

Esto significa que cuando la persona está dispuesta a pensar creativamente, de forma reflexiva y es crítica frente a lo que recibe, ya está desarrollando un *carácter intelectual*, el cual ayuda a que mejore sustancialmente su inteligencia. También su capacidad lógico-matemática, lo que a su vez le permite estructurar su pensamiento matemático con agudeza.

Tener un *carácter intelectual*, se logra si hay disposición a aproximarse de manera inteligente a las situaciones. Significa que el individuo, en nuestro caso el estudiante, si no está motivado, inclinado hacia una adecuada forma a pensar, no logrará desarrollarlo, ya que "el carácter intelectual describe un conjunto de disposiciones que no solo modelan sino que también motivan el comportamiento intelectual" (Ritchhart, 2002). Esto implica que constantemente el que logra reflexionar o ser crítico en el conocimiento del mundo, empieza también de alguna manera a ser creativo para solucionar problemas, y esto evidentemente se convierte en una bola de nieve abstracta, que conforme va rodando, se va fortaleciendo, se va puliendo. Si se lleva por un adecuado camino se fortalece tanto que ya nada podrá detenerla. Eso es lo que implica ser un intelectual, ser "inteligente", tener la disposición de pensar permanentemente sobre su entorno para así poder, en el momento adecuado, resolver problemas, también problemas relacionados con las matemáticas: quien posee carácter intelectual está más proclive a ser matemáticamente competente pues puede responder a una situación o a un problema matemático de manera creativa, reflexiva y crítica.

2.3 Pensamiento Visible

Como ya tenemos claro, el *ser matemáticamente competente* implica el desarrollo de unas habilidades y competencias que generan (en doble vía) un *carácter intelectual*, el cual es el resumen de un hábito de las personas que consideramos inteligentes. Esto implica que el docente no sólo debe esforzarse porque sus estudiantes en el aula de clase piensen sobre los problemas matemáticos a los que se ven enfrentados, sino también a que sean proactivos, que vayan "a clase armados con preguntas generadas por la lectura de sus notas de clase y el libro de texto" (Paul, 2002), si el docente logra iniciar este hábito en el estudiante está generando que el ambiente fuera de clase sea reflexivo, que permita que puedan generar preguntas conceptuales ya sean simples o complejas[6].

Sin embargo no debemos caer en la satisfacción ingenua de que porque el estudiante se pregunta sobre el conocimiento adquirido, ya estemos generando un *carácter intelectual* que lo ayuda a *ser matemáticamente competente* Debemos tener claro que "cuando la pregunta no está clara o es imprecisa, el pensamiento no tiene una guía clara" (Paul, 2002), y esto implica que en los docentes debe darse un trabajo constante para que el estudiante

[6] "Preguntas conceptuales simples (Definibles): se contestan por medio de los criterios implícitos en una definición normal de una palabra o frase. Para contestar las preguntas, meramente necesitamos entender los significados de las palabras ya establecidos y cómo se pueden aplicar apropiadamente a los casos y las circunstancias."
"Preguntas conceptuales complejas (No definibles): las definiciones normales no contestan la pregunta, sino que abren la discusión. Puntos de vista divergentes pueden influir en las definiciones inclinándolas hacia este o aquel lado. hay contestaciones mejores o peores a las preguntas conceptuales complejas, pero, al presente, no hay una contestación "correcta" o definitiva." (Paul, 2002)

logre formular preguntas no solo simples sino también complejas, que lo hagan pensar más allá de lo evidente, de lo tácitamente visto en el aula. Cuando se logra aclarar la pregunta, ya tenemos la capacidad de responderla, estamos realizando un ejercicio intelectual que puede ser imitado por los estudiantes.

Pero para lograr que haya una imitación intelectual por parte de los estudiantes, se debe tener un grado de empatía, es decir que el estudiante de alguna forma se sienta identificado, y a gusto con el *carácter intelectual* que muestra el docente, si no hay una empatía no se logrará replicar este hábito en los estudiantes, ya que “todos los buenos maestros saben que la forma en que se sienten los estudiantes, incluidos sus estados emocionales anímicos y físicos, son factores críticos que afectan su aprendizaje” (Linck, 2013). Y aunque no es un tema concreto de enseñanza matemática, sí es un tema el cual se debe enseñar implícitamente, ya que esto determina qué tan bien o mal se encuentra el estudiante para recibir la información, que esté dispuesto, no sólo a recibir un conocimiento sino también el saber tomar la actitud adecuada para que este conocimiento logre generar la abstracción e interiorización del estudiante de forma adecuada.

Se logra la empatía, no siendo “amigo” del estudiante, sino entendiendo su situación, para que así el entienda la postura del docente, y tome una actitud acorde al ambiente intelectual que se debe generar en un aula de clase, como lo indica Linck, ver la importancia de la reflexión y el tiempo en silencio para el aprendizaje, que se apropie del ejercicio que se pretende hacer constantemente, ya que “cuando los estudiantes toman en serio su aprendizaje, hacen preguntas más significativas como cuestión de rutina” (Paul, 2002), y eso es lo que debe conseguir el docente en el aula, que la rutina sea el cuestionar todo de una forma adecuada, no cuestionarse por cuestionarse, sino preguntar del por qué lo que se está aprendiendo es útil, la finalidad particular, cuando se es capaz de ver la utilidad y saber que lo que se aprende no es porque sí, se puede a lo largo del tiempo aplicar el conocimiento (abstracto) a la vida cotidiana (realidad).

“El hacernos preguntas a nosotros mismos como estudiantes es esencial al aprendizaje profundo” (Paul, 2002), cuando se logra el hábito de preguntarnos constantemente podemos ser más reflexivos, tener tiempo a solas para entender que determinado tema o problema en el cual estamos trabajando puede verse, palparse, sentirse, que no es algo meramente conceptual, que pertenece al mundo de las ideas, sino que muy posiblemente, y así es como se debe mostrar al estudiante, es útil aprenderlo para solucionar problemas cotidianos, de su realidad, cuando el estudiante es capaz de entenderlo gracias a su hábito reflexivo se está logrando que el pensamiento sea visible para él.

Ahora, el conseguir que tome un hábito reflexivo que le permita visibilizar su pensamiento significa que este se demuestra quizás por medio "del dibujo, de la escritura o de sus explicaciones sobre sus teorías en curso, se encuentran apoyados cuando dan su profundo conocimiento de las situaciones, los conceptos y temas, desde lo más simple hasta lo más complejo" (Linck, 2013), es decir que se convierta en un agente activo en su aprendizaje, no sólo esté por "inercia" en el salón colocando atención a la clase magistral, sino que se apropie de esta, sea participe, proponga, cuestione y en ocasiones también tenga la capacidad de enseñar a sus pares académicos, y hasta tenga la motivación suficiente de tener la iniciativa por leer de manera independiente sobre el tema, ya que "es posible educarse mediante la lectura por sí sola. Los lectores diestros cuestionan activamente lo que leen. Cuestionan para poder comprender. Cuestionan para evaluar lo que leen. Cuestionan para traer ideas importantes a su pensamiento" (Paul, 2002).

Entonces, el visibilizar el pensamiento implica, no solo llevar a su cotidianidad el conocimiento recientemente adquirido, sino además implica el tomar hábitos como la lectura, el saber realizar preguntas, es decir que el *carácter intelectual* vuelve a ayudar para que el estudiante sea capaz de ser inteligente, y *ser matemáticamente competente*. Esto demuestra una vez más que "la enseñanza de las matemáticas supone un conjunto de variados procesos mediante los cual el docente planea, gestiona y propone situaciones de aprendizaje matemático significativo y comprensivo" (MEN, 27). Entender que hay una transversalidad en el conocimiento, que no podemos seccionarlo, aislarlo y pretender que el estudiante logre entenderlo de la nada y no relacionarlo con el resto de conceptos y áreas del conocimiento.

Lograr que el estudiante sea consciente de su aprendizaje, haga visible su pensamiento al mundo, es impulsarlo a que sea intelectualmente responsable de su situación, esto implica diferentes atributos como lo expone Paul, los cuales son: humildad intelectual, valor intelectual, empatía intelectual, integridad intelectual, perseverancia intelectual, la confianza en la razón, y la autonomía intelectual. Estos atributos deben no solo inculcarse en los estudiantes sino también tenerlos como docente, ya que podemos tener un conocimiento superior, pero si no tenemos humildad intelectual no conseguiremos mostrar una empatía, esta humildad está relacionada con ser consciente de las equivocaciones que pueden cometerse, por más experto y diestro que sea en el tema, mostrar una humildad intelectual, implica además el reconocer que uno desconoce un infinito mar de conocimiento.

El valor intelectual consiste en apreciar todo el valor de lo que se sabe, no necesariamente algo monetario, material, sino que el tener ese conocimiento implica que debemos apreciarlo, valorarlo, respetar lo que hemos aprendido. La empatía intelectual va muy relacionada con el sentir, el ser susceptible a lo que nos rodea de forma intelectual, que existen personas que intelectualmente están por encima, al lado y por debajo de uno, y que debemos saber relacionarnos con ese otro tipo de conocimiento, para no generar ni rechazo ni aversión. La perseverancia intelectual, implica ser constante en el aumento del conocimiento, en ser cada día capaz de ponerse una meta de aprender algo, perseverar en la obtención del conocimiento.

La confianza en la razón es fundamental y tener bases sólidas en lo que se aprende resulta necesario, ya que esto conlleva a resolver de una mejor manera los problemas de la realidad, ya que, si no tenemos un conocimiento mejor estructurado, esto genera automáticamente una desconfianza en lo que se vaya a realizar y por ende no ser racional en el afrontar la realidad. La autonomía intelectual, se consigue en un grado de madurez, ya que como sabemos, el ser humano siempre imita para poder aprender, y no es que esto esté mal, simplemente que en sus inicios de aprendizaje es normal y sano hacerlo, lo que no debería volverse costumbre es no tener un grado de autonomía intelectual, ya que esta lleva a un estancamiento personal, a permitir que se generen fronteras mentales frente a la adquisición del conocimiento, y por último la integridad intelectual es la reunión de todo lo anterior, esa sinergia que debe tenerse para aumentar unos atributos y bajar otros, según las necesidades.

Así pues, el valor intelectual incluye unos atributos que permiten al estudiante mostrar su avance, y a su vez evidenciar lo que se aprende, mostrando un pensamiento visible. Entendemos por pensamiento visible como “un enfoque flexible y sistemático basado en evidencia que busca integrar el desarrollo del pensamiento de los estudiantes con el contenido educativo de las materias de los cursos” (Linck, 2013), el evidenciar que el estudiante madura intelectualmente mostrando que es capaz de replicar el conocimiento adquirido, no de forma autómata, sino con criterio, con apropiación, sin necesidad de utilizar términos técnicos, sino con sus palabras, a su manera, colocando un sello personal.

El lograr que el estudiante aplique el conocimiento matemático en su diario vivir de forma natural, con su sello persona muestra que de forma inconsciente se apropia de tal forma que se vuelve natural, revelando que “el marco del Pensamiento Visible exterioriza los procesos de pensamiento, de manera que el aprendiz –ya sea de cualquier edad– pueda tener un mejor manejo de ellos” (Linck, 2013). Esa exteriorización del conocimiento permite al docente continuar con las estrategias implementas, porque si el estudiante no es capaz de usar a su manera lo que acaba de aprender le será muy difícil llegar al punto de resolver problemas más complejos o avanzar en su estructura mental para abonar terreno en temas que requieran de mayor atención y conceptos previos, como casi siempre ocurre en el conocimiento, este es acumulativo, nunca el estudiante parte de cero.

Si vemos que en el aula logramos generar el ambiente intelectual adecuado, permitiendo que haya un carácter intelectual para la adquisición de nuevo conocimiento, significa que “en la búsqueda de una cultura de pensamiento, la noción del pensamiento visible ayuda a materializar lo que un aula así debería ser, y proveer una especie de brújula que nos señale el camino” (Linck, 2013). Esta debe ser la brújula que todos los docentes debemos utilizar en nuestro diario vivir en el aula de clase, que sea nuestro termómetro, de si nuestros estudiantes reflexionan acerca de lo que aprenden o no, que utilicen los términos en su lenguaje cotidiano, que piensen antes de abarcar un problema real o que al ver una incoherencia sean capaces de corregir y ser racionales en sus decisiones.

Cuando el estudiante logra “la introspección consciente se convierte en una parte efectiva en el aula del pensamiento visible, brindando a los estudiantes las destrezas que necesitan para engancharse en procesos de construcción interna y de reflexión productiva” (Linck, 2013), un proceso que cada uno debe recorrer intelectualmente, que debemos acompañar de la mejor manera, motivando, siendo ejemplos y mostrando un *carácter intelectual*, para que el aprendizaje sea significativo, y que la estructura mental pueda reforzarse con buenos hábitos intelectuales, los cuales son las herramientas que permitan al estudiante a ser cada vez más competente.

2.4 Enseñanza para la Comprensión

Históricamente sabemos que al popularizarse la educación en el siglo XIX, se estandarizaron conceptos y bases que para ese entonces se creían los correctos, y era evidente que fuese necesario impulsar el conocimiento por el conocimiento, sin dar grandes explicaciones ni formar al estudiante para pensar más allá de lo que el profesor le enseñara. A inicios de la educación, la humanidad desconocía todo el mundo que lo rodeaba, por ende, los pocos que tenían una formación académica, veían con buenos ojos que se replicara lo que ellos habían aprendido a sus estudiantes, y estos replicasen lo mismo a futuro quizás con otras personas.

Esto significó que la educación se centrara en enseñar un sin número de conceptos, reglas, métodos, definiciones y acontecimientos, en definir al buen estudiante como aquel que tenía una excelente memoria para recitar lo que el profesor había enseñado, sin cambiar mayor cosa, que realizara lo que se le pedía sin ir más allá. Mientras se estandarizó el conocimiento en la población, se bajaron los índices de analfabetismo y se tecnificaron los conceptos, esto hizo su trabajo, mal o bien, pero consiguió que la humanidad avanzara considerablemente, ya que hizo que el conocimiento estuviera al servicio de todos, y no de unos cuantos. Sin embargo, al evolucionar el mundo, y las nuevas generaciones ya tenían mayores herramientas que sus antecesores, esto obligó a que se replanteara el sistema educativo, ya que el aprender un sin número de cosas, porque así se ha hecho siempre, ya estaba siendo cuestionado y era el momento de cambiar el paradigma educacional.

Ya para la época de las décadas finales del siglo XX se habían llevado a cabo grandes discusiones a nivel global, acerca de lo acertado que era el sistema educativo para el mundo actual, aunque no todos estaba convencidos de dejar ese fiable y buen sistema tradicional, de enseñar a memorizar y no más; lo que dio la estocada final para convencer a la gran mayoría fue la intromisión de la tecnología en el diario vivir de las personas, ya se contaban con potentes herramientas como el computador, y el Internet estaba ya en auge, permitiendo tener acceso al conocimiento sin necesidad de desplazarse grandes distancias, la era de las comunicaciones estaba iniciando, y nadie sabía cómo afrontarla.

Es por esto, que ilustres pensadores contemporáneos empezaron a impulsar un cambio de paradigma en la forma de enseñar, revolucionando el concepto, cuestionando el por qué enseñar tantas cosas que a la final no todas se iban a usar en la cotidianidad del que las aprendía, y aquí fue cuando se pensó en que la educación debía no sólo centrarse en enseñar a memorizar conceptos, sino poner su atención en enseñar a pensar al individuo, que el profesor se convirtiera, del todo poderoso en conocimiento a un guía orientador del proceso del estudiante, cuestionándolo, motivándolo para que su curiosidad por aprender no se fuera perdiendo con el tiempo, y que sintiera y viera la utilidad de memorizar ciertas conceptos básicos, que le fueran útiles, como herramientas para poder seguir cavando en busca de una tesoro.

Así es como nace la Enseñanza para la Comprensión –EPC-, podríamos decir que “es una teoría de la acción con un eje constructivista” (Barrera), es decir que el centro de la enseñanza ya no se basa en acumular una determinada cantidad de conocimiento, sino que a partir de unas bases se va construyendo más por medio de la acción, es decir, que sea algo vivencial para los estudiantes, que puedan relacionar lo aprendido con su diario vivir, sin necesidad expresa de tener una andamiaje robusto de términos y conceptos que muchas veces son incomprensibles para ellos, y que no lograr abstraer y así ver la utilidad. Ahora, debemos identificar lo que realmente es la EPC, y su diferencia frente a la enseñanza tradicional, para esto Barrera nos indica tres preguntas esenciales, las cuales son:

- ¿Qué queremos que nuestros estudiantes realmente comprendan? y ¿por qué?

- ¿Cómo podemos involucrar a nuestros estudiantes en la construcción de estas comprensiones?
- ¿Cómo sabremos, nosotros y ellos, que sus comprensiones se desarrollan?

Para abarcar la primera pregunta, que como profesores en varios momentos de nuestro quehacer nos debemos cuestionar; ¿el conocimiento que poseo es útil para mis estudiantes? ¿Hasta qué punto debo enseñarles esto o aquello? Son preguntas que nos ayudan a acercarnos a lo que los estudiantes deben aprender bajo la comprensión, pero qué nos dice o nos permite saber si están comprendiendo lo que buscamos que comprendan. Los investigadores del Proyecto Cero aducen que la comprensión es la capacidad de pensar y actuar con lo que sabemos, para resolver los problemas en que nos vemos enfrentados, o crear productos e interactuar con el mundo que nos rodea; en esencia es tener la capacidad de utilizar de forma adecuada lo aprendido, no sólo para resolver los problemas que el profesor coloca, “la escuela tiende a trivializar los aprendizajes y a hacernos creer que con el hecho de tener las respuestas correctas a las preguntas que el docente hace, adquirimos el conocimiento suficiente para entender conceptos complejos y profundos” (Barrera), este conocimiento debe ser útil tanto dentro como fuera del aula, lo que nos lleva a responder la pregunta del por qué deben aprender determinado tema.

Barrera nos explica que para poder generar una EPC, debemos tener ciertos parámetros, como lo son los hilos conductores, estos “son importantes porque nos evidencian el gran horizonte de la educación y nos muestran que entre más comprendemos sobre algo, más nos damos cuenta de lo que nos falta por comprender”, son la línea de referencia que tanto el profesor como los estudiantes deben tener claro, ya que sin estos no tendría sentido el estudiar y aprender un determinado tema, sin ver que es la base para llegar a un objetivo mayor. Teniendo estos hilos conductores definidos por el profesor, es pertinente lograr identificar las metas de comprensión, la cuales “representan las comprensiones que el docente espera que sus estudiantes alcancen durante un determinado tiempo (un semestre, bimestre o inclusive un año) y dan sentido a las acciones que les piden a sus estudiantes realizar” (Barrera).

Esto significa, que dentro de la planeación de una asignatura, no basta con determinar una cantidad de temas que estén correlacionados, sino que debemos hacer evidentes unos hilos conductores y unas metas a alcanzar, "las metas se diferencian de los hilos en que son concretas, observables y medibles" (Barrera), es sumamente importante tener indicadores dentro del aula, no sólo de forma evaluativa hacia los estudiantes, sino también frente al proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que "lo más importante desde el punto de vista del aprendizaje es la retroalimentación para el alumno, porque es un fuerza muy poderosa para avanzar en el aprendizaje" (Perkins. 1997).

Cuando para todos los actores de la enseñanza-aprendizaje son evidentes, claras y apropiadas las metas y los objetivos, se logra un mayor interés y se le da sentido a lo que se quiere llegar, sin desestimar el proceso, "cuando las metas se hacen explícitas y se comparten con los estudiantes, les permiten entender qué es lo que están haciendo y por qué lo están haciendo" (Barrera); ahora al saber la importancia del proceso, es clave identificar los tópicos generativos, los cuales "deben responder a aquello que el maestro considera que es lo más importante que sus estudiantes aprendan y comprendan, a aquello que puede llevarlos a tomar decisiones en sus vidas, y a pensar y actuar en forma flexible promoviendo la creatividad y la competencia" (Barrera), es decir, que se determinan las bases del conocimiento, aquellos conceptos y definiciones que son el pilar, la piedra angular para buscar esa comprensión.

La siguiente pregunta, ¿cómo podemos involucrar a nuestros estudiantes en la construcción de estas comprensiones? Nos lleva a definir los desempeños de comprensión, los cuales son el centro del aprendizaje, "pues son acciones que necesitan ir acompañadas de mucha reflexión [,] constituyen aquello que los estudiantes hacen [,]están diseñados de manera secuencial para que los estudiantes desarrollen la comprensión de las metas de comprensión y de los tópicos generativos, la Exploración, la Investigación guiada y los Proyectos finales de síntesis" (Barrera). Significa, que se debe tener coherencia en los temas a enseñar, esto permite al estudiante relacionar y entender más fácilmente lo que se ha venido trabajando, que sea capaz de entender la secuencia, y así logre dar una mayor sentido y utilidad al conocimiento recientemente adquirido.

Y finalmente, ¿cómo sabremos, nosotros y ellos, que sus comprensiones se desarrollan? La herramienta tan cuestionada actualmente es la evaluación, esta debe realizarse de forma pertinente y en un ambiente sin tensiones, ya que "debe haber un proceso de evaluación continua durante la experiencia educacional y muchas oportunidades de modificar y mejorar el trabajo" (Perkins, 1997), esto nos permite identificar las fortalezas y falencias que tiene el estudiante, para así generar una EPC más impactante en el estudiante. Esto nos hace concluir que "la valoración continua se define como un conjunto de ciclos de retroalimentación centrados en la comprensión, que utilizan estudiantes y maestros a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje para apoyar dicho proceso" (Barrera).

Sin embargo, el poder definir y tener claras las bases para un EPC, no garantiza tener unos estudiantes enfocados en la comprensión, ya que además de esto se debe poner atención en la interacción entre el docente y los estudiantes, ya que esta debe ser fluida, clara, concisa y asertiva, lo que se denomina una interacción abierta, permitiendo notablemente no solo al docente perfeccionar el conocimiento del estudiante, sino que además a raíz de la objetividad, los estudiantes puedan expresarse frente al docente acerca de su proceso, esto implica que se tengan herramientas de mejora continua.

Es fundamental que el docente se muestre más cercano al estudiante en términos académicos, que pueda hacerlo preguntar sin ningún temor, "que se pueda expresar, un maestro que instala un ambiente abierto, que provoca conversación, conocimiento, comprensión, porque organiza actividades que demandan pensamiento, los alumnos van a cambiar. Ocasionalmente hay un poco de resistencia." (Perkins, 1997), y es evidente que haya resistencia al cambio, ya que todos estamos cómodos con lo que siempre hemos trabajado, y no nos gusta que nos saquen de nuestra zona de confort. Sin embargo, lo que más causa curiosidad es que "casi siempre el punto de resistencia no es el alumno ni el docente, sino la cultura establecida de la escuela" (Perkins, 1997), con esto evidenciamos que el sistema no está preparado, ni se amolda a las necesidades del mundo real, de lo que necesitan los estudiantes para verse enfrentados a cualquier situación.

2.5 GeoGebra para la solución de problemas

Vivimos en una era digital, donde las tecnologías de la información y la comunicación

(TIC) están presentes en todos los aspectos relacionados con la vida diaria, en esta realidad las instituciones educativas no son la excepción, por lo cual las dinámicas que se generan al interior de las clases de matemáticas no pueden estar alejadas de ella. Según Luis Moreno (2001), "las herramientas computacionales han modificado profundamente la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático", esto se hace evidente cuando se integran al aula software educativos de geometría dinámica, permitiendo ver los objetos matemáticos desde otra realidad.

El Ministerio de Educación Nacional ha sido insistente en los últimos años sobre la incorporación de las nuevas tecnologías para transformar la educación matemática. Una muestra de ello fue el Congreso Internacional de Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas (2002), donde Luis Moreno Armella manifestó que: "las experiencias didácticas, a nivel internacional, con relación al uso de las herramientas informáticas en la educación, sugieren que la capacidad computacional de las herramientas informáticas amplía el rango de los problemas que son susceptibles de ser abordados por los estudiantes", y es posible que "el uso sostenido de las herramientas desemboque cambios a nivel de estrategias de solución de problemas, o en cambios con respecto a la calidad de la argumentación." (Moreno, 2012).

El Ministerio de Educación Nacional (2006) establece también que como uno de los procesos que se deben tener en cuenta para ser matemáticamente competente se deben: "usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración". Las propuestas de enseñanza y de aprendizaje de la geometría han ido incorporando las TIC en el aula de clase, especialmente por la afinidad que éstas tienen con nuestros estudiantes. Sólo basta ver la fluidez y naturalidad con que nuestros estudiantes se desenvuelven al utilizar el internet o las redes sociales, al comunicarse por medio de celulares y, en general, haciendo uso de las nuevas tecnologías en su vida diaria. Teniendo en cuenta lo anterior nos preguntamos: ¿por qué no hacer uso de esas herramientas para generar un ambiente efectivo de aprendizaje y propiciar cambios en las prácticas pedagógicas?

Ahora bien, solo con la implementación de las TIC no se logra desarrollar un pensamiento crítico, ni un ambiente propicio para desarrollar los procesos de comprensión y solución de problemas en un estudiante. Es fundamental el papel que desarrolla el docente, como guía y creador de situaciones que promuevan el desarrollo de competencias, así como propiciador de una integración adecuada del uso de las herramientas en un ambiente académico.

La investigación realizada por María del Mar García (2011, p 31) en el marco de la implementación de las TIC en la educación, señala cuán importante resulta el papel del docente, la naturaleza de las tareas, la cultura social del aula y el trabajo colaborativo para garantizar la integración exitosa de las TIC en el aula. Por su parte, Miguel Carranza (2011, p 23) manifiesta que esa integración es una evolución que ha pasado primero por la incorporación y que no se deben confundir integración con incorporación, porque esta última se ciñe exclusivamente a la dotación de computadores y software a las clases.

Diferentes investigaciones realizadas en el marco de la implementación de las TIC en educación básica y media en Colombia, coinciden en señalar que el software por sí solo no es el que permite desarrollar esos procesos de argumentación, sino que es el docente a través de sus preguntas es quien sirve como mediador entre el estudiante y la actividad que se genera a través del software. Es así como García, María del Mar (2011, p 622), identifica actitudes relacionadas con las matemáticas al trabajar contenidos geométricos con un software de Geometría Dinámica llamado GeoGebra, a través del diseño de tareas en las que se ponían en manifiesto competencias matemáticas a través de la formulación de problemas para su resolución. Lo anterior nos hace cuestionar nuestro trabajo docente y nuestra relación profesional con las tecnologías aplicables a la labor educativa.

Por su parte Carranza (2011, p 62) nos hace una invitación para que involucremos en nuestras clases el programa *GeoGebra*, argumentando que este software le permite a los estudiantes movilizarse fácilmente entre diferentes sistemas de representación: simbólicos, numéricos, gráficos y analíticos, generando procesos de significación bien fundamentados.

Si bien existen varios software educativos de geometría dinámica, la idea de trabajar con *GeoGebra* surge debido a que, como enuncia Carranza (2011, p 28), este puede ser utilizado no sólo de la forma clásica, es decir, para realizar construcciones o dibujar gráficas, sino también para hacer conjeturas y realizar investigaciones. Por otra parte, en cuanto a los atributos y ventajas del uso del software, María del Mar García (2012, p 492), revela que GeoGebra posibilitó que los estudiantes evaluaran diferentes ideas mediante la construcción de una manera rápida y sencilla de múltiples ejemplos, cuya visualización y deformación les ayudó a obtener y comunicar razonadamente sus respuestas. Además, manifiesta que el software libre GeoGebra presenta ciertos atributos y ventajas para el desarrollo de un pensamiento matemático, con ciertas limitaciones que, si bien merecen nuestra atención a la hora desarrollar actividades, no entorpecen de manera relevante el proceso educativo.

Las características más destacables del software GeoGebra, y que lo convierten en una herramienta idónea para el desarrollo del pensamiento matemático a través de la geometría, incluyen en primer lugar: generar trabajo en clase a través de la constructividad, es decir, permite la posibilidad de crear y modelar micro mundos, estos micro mundos les entregan a los estudiantes la posibilidad de crear conjeturas para solucionar problemas que se les plateen y comprobar sus ideas mediante una metodología de ensayo y error.

Así mismo sus propiedades interactivas permiten una retroalimentación inmediata y efectiva que genera una toma de conciencia y conciliación de los errores cometidos a lo largo del proceso de búsqueda de soluciones. La amplia navegabilidad que proporciona el software les otorga la posibilidad a los educandos de explorar libremente el entorno que ellos mismos han creado y realizar hipótesis partiendo de diferentes perspectivas alimentadas por ese proceso de ensayo y error previamente mencionado.

Finalmente, es un programa que gracias a un sistema de modelado preciso permite ejecutar las acciones del usuario con rigor y exactitud, aunque este software es una herramienta precisa y rigurosa, su uso es sencillo y la respuesta a los comandos es rápida, lo que influye en generar interés, no solo en el análisis de resultados sino en la búsqueda dinámica de nuevas soluciones. A partir de los atributos del programa se pueden encontrar diferentes ventajas que provee el uso de esta herramienta, en la generación de procesos de comprensión y de formación de pensamiento matemático en los estudiantes, dentro de estas ventajas podemos encontrar la función formativa global que permite GeoGebra, puesto que ayuda a transmitir valores educativos y actitudes como la cooperación, implicación emocional, intensidad del esfuerzo exigido, entre otros, dependiendo del nivel de inmersión del estudiante en la tarea propuesta. (Crespo, 2006)

Del mismo modo podemos hacer uso del sistema como una motivación adicional a nuestras preguntas y a los problemas que les propongamos a los educandos, partiendo del supuesto de que, al ser un sistema digital podemos partir del interés de los jóvenes por la tecnología para inducir en ellos la motivación necesaria al realizar las diferentes actividades que necesitarán y que el docente espera promover en sus actividades. Bajo ese mismo supuesto se puede obtener como resultado que los estudiantes logren desarrollar gusto por el trabajo con el software. Gracias a la inmediatez de respuesta de la herramienta, esta permite que primero haya una reflexión, y luego el análisis de los resultados, ya que requiere poco tiempo en la visualización de las representaciones, y el efecto que los cálculos y modificaciones realizadas generan en el producto que se busca con la tarea.

Estas herramientas favorecen el desarrollo de trabajo autónomo en los estudiantes ya que sólo se necesita poseer un computador y acceder a un programa de uso libre, sin necesidad de estar conectado a Internet, para que el trabajo no dependa sólo en el aula de clases sino también se adecue al ritmo de trabajo y aprendizaje particular de cada joven. Esta característica, si bien fortalece la individualidad, no desconoce ni evita el trabajo en equipo, ya que la comparación de resultados y comprobación en conjunto se puede desarrollar y promover sin dificultad.

Por el lenguaje y la terminología del software se obliga al estudiante a pensar en la solución de problemas en términos de propiedades matemáticas. Así mismo mejora el aprendizaje de contenidos geométricos, ya que potencia la visualización, la contextualización de las propiedades y los procesos matemáticos; además ofrece la posibilidad de corroborar las ideas, recibir una retroalimentación inmediata y manipular objetos (representaciones manipulables o ejecutables mediante dragging[7]), que se consideran principios necesarios como apoyo para la resolución de problemas.

Esta herramienta motiva al estudiante en la búsqueda de demostraciones, y facilita este proceso al posibilitar la generación de modo rápido y sencillo de gran cantidad de ejemplos sobre los que razonar y argumentar. Por supuesto, como toda herramienta, GeoGebra no es perfecta, por lo que en ella se pueden identificar algunas limitaciones y algunos peligros en el desarrollo delas competencias matemáticas, que el docente deberá reconocer y ser consciente de este problema latente y evitar su magnificación. Este tipo de programas digitales pueden generar una dependencia tecnológica, que puede llevar a un estudiante a caer en el error de atribuir a los medios tecnológicos más importancia de la que en realidad poseen, pues no dejan de ser recursos que deben estar al servicio del proceso educativo, pero no a la inversa, para evitar esta dependencia, debemos fomentar su uso adecuado y no limitar a estas herramientas la realización de procesos analíticos y creativos.

Así mismo, el uso reiterado de estas herramientas puede llevar a la confusión entre la simple manipulación del programa, con el conocimiento matemático aplicado en la resolución de problemas. Esta confusión, típica cuando se adquiere un aprendizaje memorístico consistente en el almacenamiento de algoritmos, definiciones y teoremas, en vez de una construcción de las matemáticas aplicable en diferentes situaciones, será la principal preocupación del docente a la hora de emplear estas herramientas digitales, así no se logrará desarrollar la comprensión en el estudiante, ni permitirá que sea matemáticamente competente. Puede generarse una dificultad en la gestión del tiempo en caso de producirse algún problema técnico con el programa, que impida su uso o que ralentice los procesos del mismo.

Aun así, hay una razón más determinante en su selección: el hecho que GeoGebra sea de uso libre y esté disponible en múltiples plataformas favorece su escogencia. Con el

[7] Dragging*:* Término utilizado en el argot tecnológico para la acción de arrastre de diferentes elementos alrededor de la pantalla haciendo uso del mouse

fin de mejorar el aprendizaje de los estudiantes a través de la integración de las tecnologías en las prácticas pedagógicas, es una invitación a encontrar las potencialidades que éstas nos brindan para utilizarlas a favor de los estudiantes, puesto que, como bien señala Carranza (2011, p 59), los estudiantes que abordan el estudio de las matemáticas desde lo simbólico, sin recurrir a otros sistemas de representación como los numéricos, gráficos y analíticos, generan procesos de significación pobremente fundamentados. Es así como el papel que desempeñamos en ese proceso de enseñanza–aprendizaje se enriquece con la integración de este software de geometría dinámica, al ser un facilitador de dicho aprendizaje. Es en esta integración en la que María del Mar García (2011, p 35), considera que es importante analizar cómo garantizar una efectiva integración de las TIC en el aula, para lo que según ella, se hace necesario que el docente planifique de antemano dicha integración, diseñando actividades que brinden oportunidades para aprovechar sus bondades y a la vez resulten útiles para la consecución de sus objetivos de aprendizaje, es decir propiciar un espacio crítico, que pueda el estudiante cuestionar lo que está haciendo, permitiendo el desarrollo del carácter intelectual y volverlo matemáticamente competente.

CAPÍTULO III

Diseño Metodológico

El presente apartado describe las características de la investigación que se llevó a cabo, sus participantes, las categorías de análisis y el proceso de recolección de los datos que se recogieron.

3.1 Enfoque de investigación

Esta investigación se desarrolló desde el paradigma cualitativo, con el objetivo de analizar el desarrollo del pensamiento de los estudiantes al realizar una tarea geométrica mediada por el software GeoGebra. La investigación cualitativa busca comprender y analizar la realidad de los sujetos que son observados ya que “la investigación cualitativa puede ser vista como el intento de obtener una comprensión profunda de los significados y definiciones de la situación tal como nos la presentan las personas, más que la producción de una medida cuantitativa de sus características o conducta” (Salgado Lévano, 2007, 71). De igual manera, el docente se desenvuelve como observador-participante describiendo de manera minuciosa el resultado de una tarea geométrica basada en el software GeoGebra y en el desarrollo progresivo del pensamiento en los estudiantes. Se trata entonces de un estudio descriptivo que privilegia la observación de casos particulares como técnica de recolección, la cual debe ser llevada a cabo de modo que no se alteren los datos los cuales surgen de cada una de las intervenciones, resultados y manifestaciones de los sujetos observados.

Así mismo, tal como describe Martínez (2011) “La investigación cualitativa busca la *comprensión e interpretación* de la realidad humana y social, con un interés práctico, es decir con el propósito de *ubicar y orientar* la acción humana y su realidad subjetiva.” (p.13). Este ejercicio investigativo, en particular, tiene en cuenta las diferentes características del contexto de un estudiante, sus disposiciones, las herramientas que posee y de manera muy relevante, el nivel de conocimientos y saberes geométricos. Esto, con una finalidad clara: establecer si es posible desarrollar y fomentar el pensamiento matemático si se desarrolla el carácter intelectual en los estudiantes a una tarea de geometría mediada por el software GeoGebra.

Es de anotar que autores como Corbin y Strauss (2012) han señalado que la descripción y la observación “son necesarias para expresar lo que está pasando, cómo luce el panorama, qué está haciendo la gente en él y así de forma sucesiva” (p.18). Es así como se presume que este tipo de investigación puede ser el adecuado, porque permite describir la población, el espacio donde se llevan a cabo las actividades, los cambios se pueden ir identificando en un lapso de tiempo, lo que a su vez puede llevar a la generación de transformaciones en las prácticas pedagógicas de la institución educativa que impulsen el fomento del carácter intelectual y del pensamiento matemático de los estudiantes para su futuro.

La tarea de geometría aplicada posee una serie de preguntas que son de carácter abierto; no hay opciones proporcionadas en su diseño ni tampoco selección múltiple. La información brindada por el grupo focal será transcrita y analizada de manera cualitativa, ya que como describe Martínez (2011), “…rara vez se asignan valores numéricos a sus observaciones sino que se prefiere registrar sus datos en el lenguaje de los sujetos. En este enfoque se considera que las auténticas palabras de estos resultan vitales en el proceso de transmisión de los sistemas significativos de los participantes, que eventualmente se convierten en los resultados o descubrimientos de la investigación.” (p.12)

3.2 Tipo de investigación

Dentro de la investigación cualitativa existen diferentes tipos de acercamiento a la población estudiada y de igual manera, al conocimiento. Debido al objetivo de esta investigación, tanto el sujeto como el objeto de conocimiento se encuentran íntimamente ligados y los resultados dependen de relación existente entre esta diada. De igual manera los métodos de acercamiento al pensamiento matemático y al desarrollo de cualidades propias del carácter intelectual que buscan ser fomentados se presentan de manera diferenciada en los diferentes sujetos de estudio, y de manera muy notable evidenciamos que el contexto juega un rol vital ya que las variables deben ser estudiadas en el espacio donde se producen. Este último elemento es una característica proveniente de la metodología estudio de caso, la cual organiza los datos de manera que realiza observaciones a largo plazo, basadas más en informes descriptivos que en categorías pre-establecidas, describe la conducta observada, dentro del marco de los hechos circundantes y el contexto, finalmente se preocupa por la perspectiva de los participantes acerca de los hechos. En otras palabras busca identificar cómo construyen estos su realidad social. Partiendo desde estas características y rasgos, se ha decidido tomar como principal medio de recolección de datos el paradigma del estudio de casos, puesto que permite un acercamiento detallado a los sujetos de investigación y al contexto en el cual se desenvuelven.

Como bien lo explica Martínez (2011), “Los estudios de caso de este tipo tienen como objetivo documentar una experiencia o evento en profundidad o entender un fenómeno desde la perspectiva de quienes lo vivieron.” (p. 25). Para lograr este objetivo se debe realizar una triangulación de la información de los casos estudiados obtenida de una diversidad de fuentes, buscando el mayor acercamiento a la realidad. Es por ello que esta investigación toma diferentes instrumentos de recolección de información (utilizados en los estudios de casos) tales como la entrevista, anotaciones de los estudiantes y la observación tanto participante como no participante.

Investigación acción es tomada como línea en este trabajo, ya que el docente investigador ha identificado alguna dificultad con el desarrollo de su ejercicio docente y debe mejorar su práctica ofreciendo una clase más efectiva, con un contenido más atractivo y desarrollando una mejor disposición en sus estudiantes. Al llevar a cabo la investigación acción, el docente busca explicar lo que sucede en su ejercicio pedagógico, a partir de las actitudes y reacciones que tienen él y sus estudiantes. De hecho, este tipo de investigación “adopta una postura teórica según la cual la acción emprendida para cambiar la situación se suspende temporalmente hasta conseguir una comprensión más profunda del problema práctico en cuestión” (Elliot, 2000, 24).

El docente busca explicar las causas y consecuencias del problema identificado durante el desarrollo de su práctica, ya que el punto neurálgico de este tipo de investigación es solucionar una dificultad para transformar la realidad de sus estudiantes y de sí mismo. En el momento en que el docente describe lo sucedido en el contexto de su clase, se acude a un método naturalista, el cual consiste en mencionar de forma concreta y narrativa los eventos acaecidos en un entorno pedagógico, sin llegar al empleo de teorías o postulados. Finalmente, la investigación -acción interpreta cada uno de los eventos de la clase desde el punto de vista de quienes actúan e interactúan en la situación problema. La explicación e interpretación naturalista de eventos es una característica proveniente de la metodología estudio de caso utilizada para la recolección efectiva y detallada de la información. (Elliot, 2000, p.184)

3.3 Participantes (universo poblacional y muestra)

La población que participó en esta investigación corresponde a estudiantes de los grados décimos que iniciaron su proceso en el proyecto de Educación Media Fortalecida en Matemáticas del Colegio Prospero Pinzón IED. La intervención se hizo en uno de los tres décimos en donde participaron 25 estudiantes que se caracterizan por su responsabilidad y dedicación al trabajo académico. Adicionalmente todos poseen aparatos tecnológicos entre los cuales se cuentan computadores, tabletas y/o celulares; 15 estudiantes son hombres y los otros 10 son mujeres. Sus edades están comprendidas entre los 14 y 16 años de edad y pertenecen a los estratos socioeconómicos 2 y 3 de la localidad de Kennedy. En su mayoría los representantes legales son empleados y sus familias en un alto porcentaje son nucleares, queriendo decir que viven con sus dos padres.

La selección de la muestra fue intencionada, porque al comenzar con la intervención el propósito era seleccionar dos estudiantes que mostraran el deseo de comprometerse con el desarrollo de la actividad y cuando vi que E1 y E2 mostraron gran disposición aspecto importante para su selección por encima inclusive de su rendimiento académico se dio su escogencia.. E1 es una estudiante de 15 años que se interesa por cumplir con sus deberes escolares y ha estudiado toda su vida en esta institución educativa, pero no se considera buena en matemáticas. E2 tiene 14 años y se caracteriza por tener un año en esta institución educativa; su relación con las matemáticas no ha sido la mejor, pues ha manifestado que ha habido años escolares en los que ha tenido mucha dificultad para entender. Es posible darse cuenta de son estudiantes que como la mayoría de sus compañeros de salón, no se destacan por su desempeño, haciendo representativa la muestra por su similitud con el resto de la población.

Durante el transcurso de la intervención se hizo evidente que, dada dedicación y especificidad en la mirada a los sujetos de investigación, para verificar el desarrollo intelectual de, esta observación y análisis requería de un nivel de minuciosidad mucho mayor al que se tenía previsto en un principio. Es por esto que fue necesario reducir el tamaño de la muestra de n grupo entero de estudiantes a sólo dos de ellos, para sí lograr el nivel de detalle que requería esta investigación.

3.4 Consideraciones éticas

De acuerdo con lo establecido por el Ministerio de Salud en el artículo 11 de la Resolución 8430 de 1993, la presente investigación representa un riesgo mínimo para la población estudiada, ya que los participantes desarrollan una tarea geométrica, propia de la actividad escolar cotidiana, sin que esto genere traumatismos para su integridad física o psicológica. Después de haber conseguido el consentimiento informado de los estudiantes y de sus respectivos representantes legales, se atenderá al principio de confidencialidad y la información obtenida será utilizada solo con fines académicos.

3.5 Variables o Categorías de análisis

Las variables se han definido en conformidad con la definición del carácter intelectual mencionado por Ron Ritchhart (2002), en donde se requiere el desarrollo de seis cualidades o atributos que él agrupa bajo tres categorías:

Pensamiento creativo:

- Mantener una mente abierta: atreverse a ir más allá, considerar nuevas ideas, ensayar nuevas cosas y más que nada demostrar voluntad de considerar opciones.

- Tener curiosidad: no temer a imaginar y hacerle interrogaciones al mundo.

Pensamiento reflexivo:

- Hacer uso de la metacognición: la cual es la capacidad de pensar sobre su propio pensamiento, y monitorea sus propios procesos de pensamiento. Implica ser consciente de los problemas que pueden aparecerle a su pensamiento y orientar el pensamiento hacia ciertas rutas.

Pensamiento crítico

- Búsqueda activa de la verdad y la comprensión, de pensar lo que más le conviene, se plantea varias posibilidades, indaga por evidencias y pone a prueba la validez de las respuestas.
- El uso de estrategias, que se pone metas, planea, busca ser productivo.
- Cultivo del escepticismo, una sana dosis de escepticismo ayuda a evaluar mejor la información que recibe. Es receptivo a nuevas ideas pero actúa con ojo crítico.

3.6 Proceso y método de recolección de datos

Se procedió inicialmente a familiarizar a los estudiantes con el uso del software GeoGebra, para luego pasar a desarrollar en forma individual una tarea geométrica mediada por este recurso virtual. Mientras los estudiantes desarrollaban dicha tarea se recolectó información a través de registros en un diario de campo llevado por el docente investigador. El diario de campo que el investigador va redactando es una fuente valiosa de información desde el punto de vista del observador, ya que se incluyen situaciones suscitadas en clase y las reacciones de los mismos docentes y estudiantes; el propósito de redactar un diario de campo es consignar cada uno de los eventos que durante el momento de clase toman lugar. La consignación de estos datos debe ser inmediata para evitar sesgos entre problemas, situaciones y posibles soluciones a los mismos.

Adicionalmente se le solicitó a los estudiantes que fueran escribiendo lo que ellos consideraban pertinente para dar respuesta a una serie de preguntas en torno al desarrollo de dicha tarea y una vez terminado el ejercicio se realizó una entrevista dentro de un grupo focal a los estudiantes para que ellos explicaran con mayor detalle sus respuestas y el proceso que los llevó a las mismas. La intención de pedirles a los estudiantes que escriban, apunta a una manifestación sincera por parte de ellos hacia los problemas que se identifiquen, las dificultades que surjan y que aspectos sean poco llamativos de la clase. El docente obtiene información con bastante contenido acerca de las observaciones de los momentos complejos de su clase. Finalmente, encontramos que la entrevista realizada a un grupo focal tiene como intención registrar opiniones y puntos de vista de manera mucho más personal y cercana entre docente y estudiante; se genera un vínculo donde la sinceridad surge y es más fácil expresar que aspectos son positivos y negativos de la clase.

Es decir que se reconocen como instrumentos de recolección de datos:

-el diario de campo del docente investigador

-las anotaciones escritas de las estudiantes

-la entrevista en el grupo focal

3.7 Propuesta de intervención

En el momento de diseñar la Unidad Didáctica con la mediación de GeoGebra se solicitó la ayuda de expertos en el tema. Siguiendo esta guía se realizó un pilotaje con un primer grupo de estudiantes y se procedió a la aplicación de la tarea, acompañada las instrucciones de construcción y la realización una pregunta problema "*¿Qué relación existe entre las áreas de las figuras?*" Dado que todos los estudiantes dominan la herramienta no hubo dificultad en la explicación del uso de la misma, sin embargo, al tener una sola pregunta de alta complejidad, no se pudo evidenciar un desarrollo de competencias matemáticas ya que la disposición de los jóvenes atendía a la simple respuesta a la pregunta.

Ante esta respuesta de los estudiantes, se decidió hacer un segundo pilotaje con un grupo diferente. En esta oportunidad se presenta una mayor cantidad de preguntas siguiendo la guía de una actividad similar realizada por otros docentes sugerida por los expertos consultados. Durante esta segunda prueba se dispuso un tiempo de dos sesiones de clase, ante lo cual se llegó a la conclusión de que, si bien los jóvenes llegaban a unas mejores disertaciones, sin embargo, en tan pocas sesiones de clase no pudo evidenciarse con suficiencia un carácter intelectual y mucho menos una mejoría en la competencia matemática de los jóvenes. Dado que el tiempo no podría ser una limitante en el proyecto, se decide cambiar a un tercer grupo de sujetos.

Así pues, se recurrió a un tercer grupo, para el cual se crearon instrucciones más detalladas y una cantidad mayor de preguntas. A continuación, se referencian dichas instrucciones y preguntas.

"*Construir un cuadrado y sobre uno de los lados construir un triángulo rectángulo* *isósceles tal que la hipotenusa sea un lado del cuadrado. Luego construir un cuadrado en cada lado del triángulo y repetir el proceso. ¿Qué relación encuentra entre la longitud de la hipotenusa 1 y la hipotenusa 2?, ¿Qué relación encuentra entre la longitud de la hipotenusa 1 y la hipotenusa 3?, ¿Qué relación encuentra entre la longitud de la hipotenusa 2 y la hipotenusa 4?, ¿Puede predecir sin hacer cálculos, la longitud de la hipotenusa del séptimo triángulo isósceles rectángulo?, ¿Qué relaciones existen entre las áreas?, ¿Existirá otra forma de solucionar el problema que le fue planteado?, ¿Qué le despierta curiosidad de este ejercicio? ¿Quisiera saber algo más que no ha indagado o preguntado? ¿Se le ocurre pensar en si a sus compañeros se les ocurren las mismas preguntas que a usted?, ¿Cree usted estar seguro de la veracidad de su respuesta a las preguntas que le fue planteadas? ¿Por qué?, ¿Cómo sabe usted o cree saber que lo que usted afirma es cierto?, ¿Por qué es importante para usted comprender bien la pregunta y la solución?, ¿Qué tanto le ayudó GeoGebra a encontrar la respuesta a las preguntas?, ¿Qué estrategia utilizó para resolver esta pregunta? ¿Reconoce haber escogido una estrategia de solución?, ¿Tuvo dudas en algún momento? ¿Sintió que avanzaría a pesar de no estar tan seguro?"*

Así mismo, con la intención de buscar detalle, se redujo la muestra a dos estudiantes y se amplió el tiempo de intervención. Así pues, la intervención tuvo una duración de ocho sesiones de 90 minutos cada una, utilizando los recursos que ofrecía la institución en la sala de sistemas durante las horas de clase de matemáticas.

CAPÍTULO IV
Análisis de la información y hallazgos

El siguiente capítulo da cuenta del proceso analítico que se hizo a partir de la aplicación de una unidad didáctica de geometría, diseñada para los estudiantes de grado décimo. El desarrollo del Carácter Intelectual Ritchart, (2002), objeto de análisis en este estudio implica la manifestación de tres formas de pensamiento y seis atributos: el pensamiento creativo se manifiesta a partir de tener 1-una mente abierta y 2-curiosidad. El pensamiento reflexivo da cuenta del atributo de la 3-metacognición. El pensamiento crítico que se caracteriza en 4-búsqueda activa de la verdad, 5-comprensión y el uso de estrategias y 6-cultivo del escepticismo. Durante el desarrollo de las clases se tomaron datos que fueron estudiados a través de dichas categorías, observando la evolución de los estudiantes para así identificar cómo avanzaba el pensamiento matemático mientras se hacían presentes dichos atributos en la solución de una tarea de geometría mediada por el software GeoGebra.

4.1 Pensamiento creativo

Al preguntar qué relación existe entre la longitud de las hipotenusas número 1 y 2, E1 contestó que eran "lados de los cuadrados" y "las hipotenusas eran opuestas a los ángulos de 90°", mientras que E2 dijo que "tenían diferentes posiciones" y "que la hipotenusa 1 es más grande que la hipotenusa 2"; lográndose observar que ninguna de las dos estudiantes se atreve a ir más allá de lo que a primera vista ve y ambas se conforman por tratar de dar una respuesta trivial, sin ser analíticas. Responden por lo que saben; no especulan, no son creativas, no demuestran una voluntad para considerar opciones alternativas a lo ya expuesto.

Luego de un tiempo de exploración, a lo largo de la segunda sesión de clase E2 dice que "la longitud de la hipotenusa 2 es igual a uno de los catetos de la hipotenusa 1" y que "la hipotenusa 2 es aproximadamente el 75% de la hipotenusa 1"; aunque tal vez no parezcan respuestas muy relevantes o incluso exactas, si se evidencia en la estudiante un mayor análisis, mayor profundidad en sus conclusiones, no trivializa ni describe lo evidente. Empieza a mostrar una mayor comprensión de lo realizado y más que nada a considerar nuevas ideas, ya que no teme a imaginar.

Cuando se les preguntó qué relación encuentran entre la hipotenusa 1 y la hipotenusa 3, E1 y E2 seguían dando respuestas relacionadas con las medidas de las hipotenusas, pero más adelante, esta pregunta les permitió hacer comparaciones. E2 afirma que "la hipotenusa 3 es más chica y que al sumarse ésta hipotenusa con ella misma se obtiene la hipotenusa 1" mientras que E1 dice "no puede ser, la mitad de la hipotenusa 1 es la hipotenusa 3". El comparar las magnitudes de las hipotenusas, les permitió encontrar una relación entre las hipotenusas 1 y 3, lo que despertó en ellas su curiosidad. La presencia naciente de la curiosidad empieza a evidenciar este rasgo, necesario para mejorar el carácter intelectual de las estudiantes.

¿Puede predecir sin hacer cálculos, la longitud de la hipotenusa del séptimo triángulo isósceles rectángulo? es otra de las preguntas que se les hace a E1 y E2. Las respuestas de E2 fueron "¿sin medir? no" y "la construcción no alcanzaría para llegar a la hipotenusa 7"; y ante esta última respuesta E1 le responde "si es posible construir hasta la hipotenusa 7 y más; mira y verás", terminando E2 por aceptar la propuesta de su compañera, con lo que demuestra que no se empecina en lo suyo y abre su mente a la pregunta. Además, al poder compartir sus ideas y hacerse preguntas entre ellas, es posible enriquecer su pensamiento y curiosidad.

E1 expresa que nunca había pensado poder sacar una fórmula, pero que al ver que esta funcionaba para encontrar la magnitud de las hipotenusas impares sintió curiosidad por saber si sería capaz de encontrar una fórmula para las hipotenusas pares. Al ver que E1 se estaba atreviendo a ir más allá, motivada por su curiosidad y más que nada por su deseo de querer ensayar cosas nuevas, se animó a trabajar en su nueva idea. El pensamiento creativo de cada estudiante es una invitación al docente a tener la disposición de afrontar diferentes situaciones que hacen parte de sus intereses. Probablemente, al preocuparnos por el desarrollo de los contenidos, terminamos por desfavorecer el desarrollo de la curiosidad, que se ve aparecer en estas dos estudiantes, y que da señales de un rasgo del carácter intelectual. Este afán por los contenidos limita la capacidad de aprendizaje de los estudiantes.

En el momento en que E2 empieza a determinar las áreas de los triángulos, se da cuenta que la altura del triángulo 1 es la hipotenusa del triángulo 3, y dice que si se sabe la base del triángulo 1 se podría conocer las alturas y las áreas de los triángulos de toda la construcción. E2 considera nuevas ideas y más que nada demuestra la voluntad de buscar opciones alternativas, motivándola a asumir un comportamiento intelectual, esto significa que ha logrado tener la disposición adecuada para continuar con el desarrollo de su intelecto.

Después de que E1 encontró la fórmula para determinar la longitud de las hipotenusas impares, E2 llega a la misma expresión de su compañera, con la diferencia que ella encuentra el exponente, buscando un número que al multiplicarlo con la base y al sumarle 1 le dé el número de la hipotenusa impar que quiere encontrar aceptando la propuesta de su compañera, pero plantea otras posibilidades de solución.

Al finalizar la actividad se procede a realizar una serie de preguntas para establecer si el pensamiento creativo estaba presente en el grupo focal: ¿Existirá otra forma de solucionar las preguntas que le fueron planteadas? Es una pregunta que se les hace a las estudiantes E1 y E2 para invitarlas a considerar nuevas alternativas; ante esta E2 dice "sí, debe haber muchas formas para solucionar este problema, y creo que mis compañeros pudieron encontrar las mismas cosas que yo, pero con diferentes métodos ya que todos tenemos diferentes formas de ver las cosas", a lo cual E1 asintió diciendo que opinaba lo mismo. Con estas respuestas ya muestran un avance en el desarrollo de su carácter intelectual, ya que son conscientes de que todos tienen una capacidad de pensar sobre un mismo problema de forma diferente, reconociendo las habilidades y limitaciones de su propio pensamiento.

Ante la pregunta ¿Qué le despierta curiosidad de este ejercicio? E2 responde que "Absolutamente todo. A al iniciar este ejercicio dudé que pudiera encontrar algo, pero cuando realmente me concentré y vi las relaciones de las áreas y longitudes, y toda la matemática que tenía oculta, me entregué totalmente a este proyecto. Fue asombroso ver que todo estaba conectado con las matemáticas". E1 dice que "de este ejercicio lo que más me causó curiosidad fueron las preguntas sobre las hipotenusas; me parecía algo sorprendente poder encontrar alguna fórmula para hallar la longitud de cualquier hipotenusa fuera par o impar. Mi curiosidad fue la que me ayudó y me inspiró para hallar respuestas concretas". Con estas respuestas se evidencia que E1 y E2 están dispuestas a pensar creativamente, de forma reflexiva y empiezan a ser críticas en lo que reciben. Así, comienzan a desarrollar un *carácter intelectual,* el cual ayuda a que mejoren sustancialmente su inteligencia, en este caso la lógico-matemática, y a su vez, estructuran cada vez más reflexivamente y con agudeza su pensamiento matemático.

Al cuestionar si ¿Quisiera saber algo más que no ha indagado o preguntado? E2 responde que sí, "Este proyecto tiene mucho que indagar y descubrir, estoy segura de que hay más relaciones que podrían completar mis descubrimientos". Mientras que E1 responde "algo que aún me surge inquietud es saber si el árbol pitagórico tiene un límite". Estas inquietudes generan una constante motivación y curiosidad, lo que implica una constante reflexión a ser críticos con el conocimiento del mundo y con esto logran también de alguna manera ser creativos para dar solución a las preguntas.

En cuanto a la pregunta ¿Se le ocurre pensar en si a sus compañeros se les ocurren las mismas preguntas que a ustedes? E2: "Si, es un tema amplio, donde puede haber coincidencias en las preguntas que nos hicimos, pero con soluciones diferentes y preguntas que otros aún no nos hemos hecho". E1: "Pues es algo que si he pensado, saber si ellos llegaron a mis mismas preguntas, mis mismas inquietudes, porque tal vez no fui la única que notó relaciones, yo diría que muchos encontramos cosas en común, muchos teníamos las mismas conclusiones, muchos de nosotros terminábamos pensando igual". Se evidencia que al tener la disposición para pensar permanentemente en el problema, este se puede resolver en el momento adecuado, quizá de la forma en que se lo esperaban, lo cual implica que van logrando desarrollar rasgos de *carácter intelectual* que les ayudan *a ser matemáticamente competentes*.

Como se pudo observar E1 y E2, durante la intervención cada vez que su disposición mejoraba se atreven a ir más allá, consideran nuevas ideas y más que nada demuestran voluntad de considerar opciones alternativas. Adicionalmente, no temían imaginar y hacerle interrogaciones al mundo. Esto claramente deja distinguir que la mente abierta y la curiosidad, habilidades propias del carácter intelectual estaban favoreciendo el desarrollo de la tarea de geometría mediada por el software GeoGebra.

4.2 Pensamiento reflexivo

Después de haber encontrado la relación entre la hipotenusa 1 y la hipotenusa 3, E1 empieza a monitorear su propio pensamiento, respondiendo ante la pregunta: ¿Qué relación existe entre la hipotenusa 2 y la hipotenusa 4? que "es la misma que existe entre las hipotenusas 1 y 3", queriendo decir que la magnitud de la hipotenusa 4 es la mitad de la magnitud de la hipotenusa 2, lo que evidencia que está reflexionando sobre sus propios hallazgos. Es decir, que al repasar lo que ha hecho el estudiante, su pensamiento se vuelve visible, reflexivo y autocrítico, colaborando en el desarrollo de su carácter intelectual.

Luego de estar observando sus apuntes y explorando en el computador, E1 responde a la siguiente pregunta ¿Puede predecirse sin hacer cálculos, la longitud de la hipotenusa del séptimo triángulo isósceles rectángulo? "Sí se puede ya que tiene una secuencia". E1 llega a esta conclusión después de verificar que la hipotenusa 7 era la mitad de la hipotenusa 5, que la hipotenusa 5 era la mitad de la hipotenusa 3 y que la hipotenusa 3 era la mitad de la hipotenusa 1. Pese a que estaba segura de la secuencia, prefirió hacer la construcción hasta la hipotenusa 7 para verificar si lo que pensaba era cierto, lo cual fue acertado porque le ayudó a evaluar mejor la información que estaba manejando. No solamente concluyeron a partir de sus propios hallazgos, sino que validaron su propio pensamiento en forma espontánea con la ayuda del software GeoGebra, y al validar su pensamiento se convierten en agentes activos en su aprendizaje.

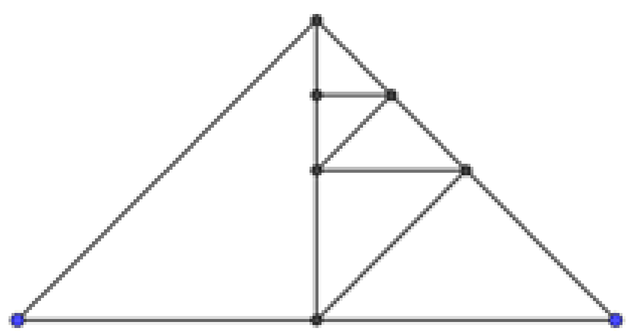
Posteriormente E1, después de haber manifestado que sí se podía predecir la magnitud de las hipotenusas impares cercanas, dice que "esto no servía para las lejanas", queriendo decir que dividir cada mitad en otra mitad y así sucesivamente no era muy práctico. Esta observación deja entrever que E1 no se estaba conformando con lo que se le pedía, sino que se estaba planteando otras posibilidades, lo que animó a sus compañeros a tratar de buscar una fórmula que sirviera para establecer la magnitud de cualquier hipotenusa impar. Estaba siendo reflexiva sobre su propio pensamiento, decidiendo en qué tenía que pensar, reforzando el hecho que se apropie de sus ideas, sea partícipe, proponga, cuestione y en ocasiones también tenga la capacidad de enseñar a sus pares académicos por medio de la experiencia, y hasta tenga la motivación suficiente de tener la iniciativa por seguir indagando y cuestionándose acerca de lo que plantea.

Después de perseverar, E1 se acerca y me dice “tengo la fórmula” y me explica que lo que hizo fue escribir el número de la hipotenusa impar que deseaba encontrar, en este caso era la hipotenusa 101 y que esta era igual a la hipotenusa 1 sobre dos elevado a la incógnita y que para hallar esa incógnita había que dividir la hipotenusa 101 en dos y que el número del cociente era el exponente del dos. Observo sus apuntes y tenía la siguiente expresión: $n_{101} = \frac{n_1}{2^?}$ y continúa, afirmando que la incógnita sería 50 porque toma el cociente sin decimales, o sea que para encontrar la magnitud de la hipotenusa 101 se debería emplear la siguiente expresión: $n_{101} = \frac{n_1}{2^{50}}$. En su proceso metacognitivo E1 evidencia la regularidad que existe entre las hipotenusas impares. Entonces, se pregunta sobre la posibilidad de encontrar la magnitud de hipotenusas lejanas, obteniendo después de varios intentos la expresión antes mencionada.

Para convencer al docente de su fórmula escoge hipotenusas cercanas, como las llama ella, o sea la hipotenusa 7 y la hipotenusa 9 para validar su fórmula, porque no sería muy práctico construir el árbol pitagórico hasta la hipotenusa 101. Aquí se puede evidenciar que la estudiante fue capaz de pensar con variaciones y álgebra, ya que a partir de un caso particular, llega a una conclusión general y la expresa en un lenguaje algebraico. Además hace uso de la potenciación y de algunos números reales, haciendo presente el pensamiento numérico. E1 seleccionó técnicas precisas para medir las magnitudes de las hipotenusas impares evocando en el desarrollo de la pregunta el pensamiento métrico, pero todo esto no se hubiera logrado si no organiza y clasifica los datos que iba obteniendo a través de sus observaciones. Lo anterior es una muestra de que al favorecer el desarrollo del carácter intelectual, se puede mejorar el pensamiento matemático, ya que esto no hubiera sido posible si en las sesiones de clase no estuviera presente la disposición por hacer las cosas, y una motivación que permita seguir orientando su pensamiento hacia otras rutas no exploradas.

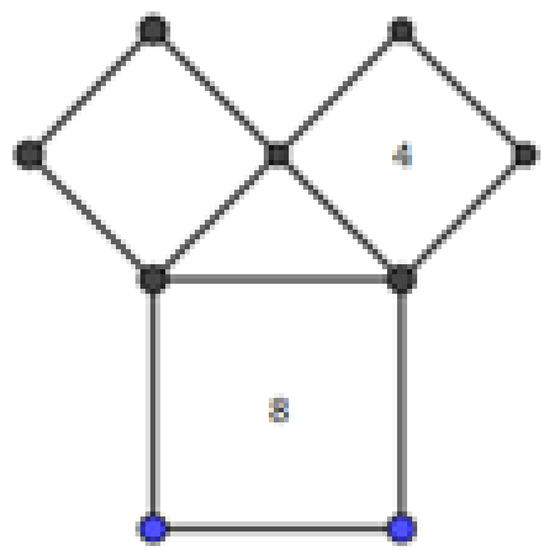
E1 después de comparar la información recolectada, dice que la relación entre los cuadrados va disminuyendo de mitad en mitad, que si el área del cuadrado 1 mide 8 cm^2 entonces el área del cuadrado 2 mide 4 cm^2, y así sucesivamente. Independientemente de que ya no se esté hablando de hipotenusas, sino de áreas, la estudiante orienta su pensamiento hacia ciertas rutas que han sido efectivas para ella, a través de su pensamiento reflexivo y termina diciendo que entre el área de los triángulos pasa lo mismo que entre los cuadrados, o sea, que se cumple para todas las figuras. Dice “pensé que cuando se refería a todas las figuras estaba hablando solamente de los cuadrados y los triángulos”, pero me dice que no, que también se cumplía para los diamantes; los diamantes son unos polígonos irregulares que se forman al cerrarse las ramas, lo anterior es una muestra de que la estudiante, después de verificar sus ideas se atreve a conjeturar, relacionando lo que sabe con las sucesiones y las áreas de la figuras, poniéndose de manifiesto su pensamiento geométrico, y por ende le da un valor intelectual a lo que está realizando, lo que permite apreciar todo el valor de lo que sabe frente a la situación estudiada.

E2 dice que con lo que encontró sobre las alturas y el primer triángulo, decidió construir desde el primer triángulo todos los triángulos y lo hace así:



Continúa diciendo que se van formando los otros triángulos de la construcción y decidió buscar si el área de una cantidad definida de triángulos podría sumar la del triángulo 1. Calcula las áreas de los triángulos del 2 al 7, $\Delta_2 = 12.5$, $\Delta_3 = 6.25$, $\Delta_4 = 3.125$, $\Delta_5 = 1.5625$, $\Delta_6 = 0.79$ y $\Delta_7 = 0.4$. Afirma que su idea es verdadera y concluye diciendo que la suma de los triángulos de toda la construcción es igual al área Δ_1. Cuando E2 hace referencia a la suma de los triángulos de la construcción, realmente está refiriéndose a todos los triángulos de una rama del árbol pitagórico. Aquí el pensamiento geométrico se pone de manifiesto en el momento de utilizar relaciones entre áreas en su conjetura y al verificarlas, gracias a su capacidad de pensar sobre su propio pensamiento, pensó que si el todo lo dividía en partes, con la suma de sus partes obtendría el todo. Esto refuerza la confianza en la razón, la cual es fundamental y debe tener bases sólidas para lo que se está conjeturando, ya que conlleva resolver de una mejor manera el problema, porque si no tiene un conocimiento mejor estructurado, no podrá seguir desarrollando su carácter intelectual y por consiguiente su habilidad para ser matemáticamente competente.

E1 dice que al comienzo no encontraba una relación entre la hipotenusa 1 y la hipotenusa 2, pero al darse cuenta de que existía una relación entre las áreas de los cuadrados porque uno era la mitad del otro, y estos tenían como lados las hipotenusas, luego cae en cuenta que la hipotenusa 1 por la hipotenusa 1 es el área del cuadrado 1 pues por lógica, como dice ella, la hipotenusa 2 por la hipotenusa 2 le da el área del cuadrado 2, y que sabiendo esto podía hallar una ecuación y en sus apuntes tenia lo siguiente:



$$4 = \frac{8}{2}$$

$$4 = \frac{\acute{A}rea\ del\ cuadrado\ 1}{2}$$

$$4 = \frac{n_1 * n_1}{2}$$

$$4 = \frac{n_1^2}{2}$$

$$\acute{A}rea\ del\ cuadrado\ 2 = \frac{n_1^2}{2}$$

$$n_2 * n_2 = \frac{n_1^2}{2}$$

$$\sqrt{n_2^2} = \sqrt{\frac{n_1^2}{2}}$$

$$n_2 = \sqrt{\frac{n_1^2}{2}}$$

E1 ya se había dado cuenta que existe relación entre las áreas de los cuadrados y se permite pensar sobre la posibilidad de que existía alguna relación entre las hipotenusas 1 y 2 a partir de dicha relación. E1 dice que esa es la ecuación para la primera hipotenusa par, pero que para hallar la magnitud de la hipotenusa 4 debía emplear la siguiente fórmula:

$$n_4 = \frac{\sqrt{\frac{n_1^2}{2}}}{2^?}$$

Para hallar el exponente E1 divide por 2 la hipotenusa que se quiere hallar, en este caso la 4 y el cociente es el que se toma como exponente pero se le resta 1

$$n_4 = \frac{\sqrt{\frac{8}{2}}}{2^1}$$

$$n_4 = \frac{\sqrt{4}}{2}$$

$$n_4 = \frac{2}{2}$$

$$n_4 = 1$$

Y finaliza diciendo E1 que si quiere sacar una hipotenusa grande también funciona y escribe lo siguiente:

$$n_{100} = \frac{\sqrt{\frac{n_1^2}{2}}}{2^?}$$

$$n_{100} = \frac{\sqrt{4}}{2^{49}}$$

Aquí é1 trabajó con números reales y representa diferentes situaciones con potenciación y radicación, propio del pensamiento numérico, es decir que utiliza como base el conocimiento ya estructurado y sólido para demostrar y generar un nuevo conocimiento para ella. Adicionalmente, es capaz de encontrar una forma precisa para medir magnitudes, y justifica su selección relacionando áreas entre cuadrados. Es a través del desarrollo del carácter intelectual que E1 llega de un caso particular, a una conclusión general expresándola en un lenguaje algebraico. E1 logró orientar su pensamiento y encontrar la forma de determinar la magnitud de cualquier hipotenusa del árbol pitagórico sin la necesidad de tener que medir.

Al finalizar la actividad se procede a realizar una serie de preguntas para establecer si el pensamiento reflexivo estaba presente en el grupo focal: ¿Cree usted estar segura de la veracidad de sus respuestas a las preguntas que les fueron planteadas? ¿Por qué? E1 responde que sí, “siempre estuve segura de mis respuestas, porque cuando no lo estaba era cuando más analizaba la pregunta, más me cuestionaba y más me esforzaba por conseguir una respuesta lógica y concreta. Creo que jamás puse una respuesta por azar, siempre las rectifiqué para tener una total confianza en ellas”. E2 responde también que sí, “al inicio lo dudé bastante, pero corregí varias veces mis apuntes hasta verificar que mis respuestas eran correctas”, el cuestionarse acerca de lo que responden muestran una autonomía intelectual, la cual se consigue en un grado de madurez, ya que como sabemos, el ser humano siempre imita para poder aprender, y no es que esto esté mal, simplemente que en sus inicios de aprendizaje es normal, más aún en un proceso que es totalmente nuevo para ellas.

En la pregunta ¿Cómo sabe usted o cree saber que lo que usted afirma es cierto? E1: “pues todas las cosas que dije en las ponencias, en las preguntas formuladas por el profesor, absolutamente todo está comprobado, todo lo verifiqué, creo que no diría algo en lo que no estoy 100% segura”. E2 dice que “he llevado un proceso y me he encargado de verificar todas mis respuestas", con estas respuestas reafirman que aunque el conocimiento que han adquirido es nuevo y en ocasiones les genera dudas, su carácter intelectual ha desarrollado una madurez que les permite estar seguras de lo que hablan, permitiendo que avancen a nuevos horizontes o expongan sus conjeturas frente a sus pares académicos o sus docentes.

El pensamiento reflexivo de E1 y E2 a través de la metacognición, favorece la capacidad de pensar sobre su propio pensamiento, y monitorear sus propios procesos de pensamiento. El ser conscientes de los problemas que pueden aparecerle a su pensamiento, les permitió orientar dicho pensamiento hacia ciertas rutas.

4.3 Pensamiento crítico

Cuando se da la instrucción de construir un cuadrado, E1 y E2 no presentaron mayor dificultad para realizarlo, porque tenían clara la definición de esta figura geométrica, pero cuando se pide que construyan un triángulo isósceles rectángulo cuya hipotenusa sea uno de los lados del cuadrado, E1 busca en internet qué es un triángulo isósceles rectángulo, porque no recordaba si ese triángulo era el que tenía todos sus lados iguales, muestra que busca ser productiva y busca estrategias para cumplir con la instrucción dada.

Cuando se les pregunta ¿qué relación existe entre la hipotenusa 2 y la hipotenusa 4? E2 dice que "la hipotenusa del triángulo 4 era igual a los lados del triángulo 2", se procede a verificar con la ayuda del software GeoGebra, dándose cuenta de que su conjetura no era cierta ya que los catetos del triángulo 2 eran diferentes a la hipotenusa del triángulo 4. Esto no generó desánimo, y lo más interesante es que ya no está dando respuestas simples, a pesar de lo equivocada que pueda estar. Se sostienen en esa búsqueda de la verdad, e intentan ser capaces de probar sus teorías, lo que permite cultivar el escepticismo, ya que una sana dosis de escepticismo ayuda a evaluar mejor la información que recibe de diferentes fuentes.

Después de estar observando sus apuntes y explorando en el computador E1 responde a la siguiente pregunta ¿puede predecir sin hacer cálculos, la longitud de la hipotenusa del séptimo triángulo isósceles rectángulo? Ella responde que sí se puede, ya que tiene una secuencia; llega a esta conclusión después de verificar que la hipotenusa 7 era la mitad de la hipotenusa 5, que la hipotenusa 5 era la mitad de la hipotenusa 3 y que la hipotenusa 3 era la mitad de la hipotenusa 1. Curiosamente, pese a que estaba segura de la secuencia, prefirió hacer la construcción hasta la hipotenusa 7 para verificar si lo que pensaba era cierto, lo cual es acertado porque le ayuda a evaluar mejor la información que está manejando. Se puede apreciar que E1 indaga por evidencias y pone a prueba la validez de las respuestas, con lo que está comenzando a tener una estructura metodológica, aun cuando ella no la identifique como tal. Sin embargo, la construcción le permitió probar lo que pensaba, creando en ella confianza que permite fortalecer y desarrollar la madurez intelectual que tanto se busca en el estudiante, para así dar vía libre al pensamiento visible.

E1 y E2 están tratando de buscar una fórmula que les permita encontrar la magnitud de cualquier hipotenusa impar. Las dos hacen uso de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con los datos numéricos que van obteniendo con la ayuda del software GeoGebra. Hasta pareciera como si estuvieran adivinando, y son tolerantes cuando no obtienen lo que esperan. Se puede apreciar cómo se ha ido fortaleciendo la disposición a través del tiempo, donde E1 y E2 parecen muy entregadas en alcanzar su meta, plantean diferentes procedimientos para llegar a una respuesta, lo que conlleva observar un pensamiento crítico, dentro del que se sitúa la búsqueda de estrategias.

E2 se enfoca en mejorar la construcción del árbol pitagórico y en prolongar sus ramas, ya que según ella, si el árbol no está bien construido, la información recolectada no puede ayudar a relacionar la información, ya que para hacerlo necesita datos exactos. Aunque aún no ha logrado encontrar una fórmula para determinar la magnitud de las hipotenusas impares es consciente de que no ha agotado todos los pasos, porque sigue utilizando los datos a través del ensayo y error.

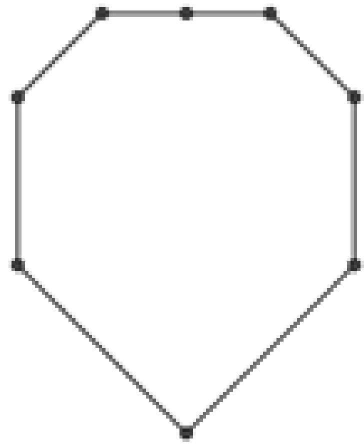
E2 trata asimismo de hacer uso del teorema de Pitágoras, pero en lugar de sumar los cuadrados de los catetos, los resta. La invito entonces a revisar lo que está haciendo, corrige su error y luego dice “el cateto es la misma hipotenusa 2”, pero termina abandonando esta idea porque está interesada en las hipotenusas impares, con lo que proyecta una sana dosis de escepticismo que no la convence tan fácilmente y la ayuda a evaluar mejor la información que tenía.

Posteriormente, E1 manifiesta que después de escuchar a E2, se da cuenta de que esa fórmula no se puede usar porque en el momento de sacarle la raíz cuadrada a la suma de los cuadrados de los catetos y dividirlos entre dos obtiene la siguiente hipotenusa impar y que para esa gracia dividía la hipotenusa entre dos. Se puede apreciar en esto que la estudiante fue receptiva a la idea de su compañera, actuando con ojo crítico, siendo consciente de que un par puede contribuir al desarrollo de su pensamiento, que la estructura lógica ajena a su ser le permite también entablar una búsqueda activa de la verdad y la comprensión, en lugar de pensar lo que más le conviene, es decir con esto se plantea varias posibilidades, lo que le permite cuestionarse y ser crítica en lo que realiza.

Cuando se les pregunta a E1 y a E2 ¿qué relación existe entre las áreas de las figuras? las estudiantes prefieren perseverar en la solución de las preguntas en las que se encuentran trabajando, lo cual es una muestra de la disposición que tienen en el desarrollo de las mismas, ya que son conscientes de que no han agotado los pasos y siguen adelante.

E1 dice que para encontrar la relación entre las áreas de las figuras lo primero que hizo fue buscar una herramienta que le sirviera para hacerlo, y que la encontró, decía "área" y pues ahí empezó a seleccionar los puntos de su cuadrado inicial, pero no le salía el área, y que para no equivocarse y después terminar borrando algo de su árbol pitagórico, lo que hizo fue construir un cuadrado aparte para resolver ese problema, y luego se dio cuenta de que solamente tenía que seleccionar la parte interior del polígono y ahí ya le salía el área de la figura. Aquí se puede observar cómo la estudiante plantea diferentes pasos para llegar a determinar el área del cuadrado, empleando el uso de estrategias que le permitiera recolectar el área de otras figuras con mayor facilidad.

Otra cosa que a E2 le llamó la atención fue la figura que se formaba entre sus ramas:



Usando el software GeoGebra, E2 calculó el área de estas figuras y según su propia construcción encontró que sus áreas fueron: en la figura 1 su área fue de 93.72, en las figuras 2 y 3 sus áreas fueron de 46.86 y en las figuras 4 y 5 sus áreas fueron 23.43, E2 dice que se dio cuenta de que se sigue cumpliendo la relación de los triángulos y la relación de los cuadrados, indagando por evidencias y poniendo a prueba la validez de su respuesta a la pregunta ¿qué relación existe entre las áreas de las figuras?

Mi idea principal, dice E2, era que la altura del triángulo 1 era igual a la hipotenusa del triángulo 2, pero cuando hizo la verificación se dio cuenta que no era así según las longitudes de su construcción porque había una diferencia de 2.07. Sin embargo, sigue indagando por evidencias y se da cuenta que la altura del triángulo 1 medía lo mismo que uno de los catetos del triángulo 2, y esto le hizo recordar algo que había observado anteriormente "*los catetos de los triángulos son la próxima hipotenusa que se encontrará en la construcción"*. Según esto el cateto del triángulo 2 medía lo mismo que la hipotenusa 3. Al verificar se da cuenta de que la altura del triángulo 1 es igual a la hipotenusa del triángulo 3. La estudiante fue capaz de revisar sus cuestionamientos y utilizar sus datos como evidencias para probar sus teorías, propio de un pensamiento crítico, que demuestra un cierto grado de madurez intelectual.

Al finalizar la actividad se procede a realizar una serie de preguntas para establecer si el pensamiento crítico estaba presente en el grupo focal: ¿Por qué es importante para usted comprender bien la pregunta y la solución? E1 responde "para mí y creo que para muchos, es muy importante tener una muy buena comprensión de la pregunta, ya que si no la entiendo bien no es posible resolverla y también es muy importante comprender la respuesta porque así no pondré algo ilógico, algo que no entienda”. E2 dice “para dar una respuesta con verdaderos argumentos y correctos”, con este tipo de preguntas se indaga por evidencias y pone a prueba la validez de sus respuestas, reforzando su nivel de autocrítica, indispensable para fortalecer la madurez intelectual.

¿Qué tanto le ayudó GeoGebra a encontrar la respuesta a las preguntas? E1: “GeoGebra fue una herramienta muy útil en el ejercicio del árbol pitagórico, pero yo diría que GeoGebra no me daba las respuestas a las preguntas, yo las miraba a través de ella”. E2: “A mí mucho. Sin el software libre no hubiera encontrado las relaciones entre las áreas, ya que tiene las herramientas necesarias para realizar el trabajo más fácil y mucho más organizado”. El pensamiento se hace visible por medio del software GeoGebra, y las estudiantes son conscientes de que aunque es una herramienta poderosa para comprobar su pensamiento no es suficiente ni les da respuestas absolutas para lo estudiado.

¿Qué estrategia utilizó para resolver estas preguntas? E1: “pues mi única estrategia era analizar bien las preguntas, mirar de todos lados a ver si encontraba alguna relación o algo así que me ayudara y comprobar los resultados que me daban para así tener una respuesta certera”. E2: “usar todos los recursos matemáticos que tenía a mi alcance, todos los conocimientos que he adquirido en años anteriores”, en E1 se evidencia un grado de madurez intelectual mayor, ya que es consciente de las habilidades que posee y busca múltiples opciones para comprobar los resultados, en cambio en E2 basa su comprobación en toda la estructura matemática que tiene, buscando los criterios intelectuales que ha adquirido a lo largo de su vida.

¿Reconoce haber escogido una estrategia de solución? E1 responde, “más que todo me basé en mis conocimientos y en las cosas que me podían servir para la solución de las preguntas y haciendo uso de mi imaginación podía ver la mejor alternativa para dar solución a las preguntas del profesor”. E2 responde, “sí, buscar qué herramienta matemática que me hiciera ver el problema desde otra perspectiva”, buscan alternativas a su pensamiento inicial, fortaleciendo el carácter intelectual que ya han venido estructurando a lo largo del proceso.

¿Tuvo dudas en algún momento? E1 responde que "en muchos momentos tuve dudas. Algunas veces me preguntaba si iba por buen camino, pero el profesor me ayudó bastante dándome ánimos de que yo podía y que lo estaba haciendo bien". E2: "Si, es inevitable, porque no es un ejercicio en el que al final te darán la solución, es algo que tienes que encontrar y demostrar que es correcto, pero hay momentos en que no sabes cómo hacerlo y tampoco cómo presentar tus ideas para que se logren interpretar correctamente". Aunque se ven enfrentadas a dudas e inconvenientes, su motivación les permite seguir con el proyecto, tienen la disposición necesaria para seguir desarrollando el pensamiento, logrando así ser más competentes a nivel matemático.

¿Sintió que avanzaría a pesar de no estar tan segura? E1: "Algunas veces me quería dar por vencida, pero me ganaban las ganas de saber, de encontrar la respuesta por la que tanto me había esforzado por conseguir". E2: "Sí, aunque las dudas siempre estaban ahí, sentía que estaba muy cerca de encontrar la respuesta. Aunque me desconcentrara al estar confundida, observaba los avances y motivaba nuevamente". Se refuerza el hecho de que la motivación juega un papel importante para lograr una disposición adecuada al momento de recibir el nuevo aprendizaje, aun cuando el proceso es más independiente y autónomo. Claramente E1 y E2 en vez de pensar en lo que más les convenía, prefieren plantearse varias posibilidades, indagan por evidencias y ponen a prueba la validez de sus respuestas, porque están en esa búsqueda de la verdad. Esto lo logran a través del uso de estrategias, se ponen metas. Finalmente, con la ayuda de sus pares, del docente o de ellas mismas logran evaluar mejor la información que obtienen gracias a una sana dosis de escepticismo, lo que permite evidenciar en ellas la presencia de cierto pensamiento crítico.

CAPÍTULO V

Conclusiones

En este capítulo se pretenderá dar respuesta a la pregunta de investigación mediante la presentación de conclusiones a las cuales condujo la investigación realizada y descrita previamente organizadas a la luz de los objetivos específicos.

- Se pudo observar que, al momento de desarrollar las preguntas, las estudiantes son reacias a compartir sus opiniones en público porque tienen miedo de lo que sus compañeros o incluso su profesor puedan opinar de ellas. Allí la actitud del docente juega un papel fundamental al momento de animar a sus estudiantes, a pesar de que en algunas ocasiones ellas estén equivocadas, puesto que de esta forma se favorece su disposición. Así van ganando confianza y se permiten seguir en la búsqueda de la verdad. Posteriormente, cuando su capacidad de exploración se pone de manifiesto, van adquiriendo la seguridad para escribir sus ideas mientras reflexionan sobre sus propios hallazgos, haciendo evidente que la motivación y el refuerzo positivo son vitales para el afloramiento del carácter intelectual.
- Es notable que E1 y E2 al comienzo quieren dar una respuesta rápida a lo que se les pregunta, pues dicen lo que primero se les viene a la mente o lo que ven a primera vista. Por eso es que el docente pregunta de manera paciente para que las estudiantes tomen su tiempo para reflexionar sobre lo que observan y sobre su propio pensamiento. Al momento de la interacción entre E1 y E2 se pudo observar que expresaban sus ideas, acuerdos y desacuerdos, y de esta manera terminaban por reafirmar su pensamiento o aprendiendo de su par académico.
- En primera medida se puede afirmar que, a partir de los resultados obtenidos con las dos estudiantes el ejercicio propuesto, tomando como referencia una tarea geométrica permite el afloramiento del carácter intelectual y hace evidente cómo esa disposición lleva a la competencia matemática. A su vez, el fortalecimiento de dicha competencia genera la aparición de nuevos interrogantes mediante los cuales se sigue propiciando el desarrollo de ese carácter intelectual.
- Cuando se proponen tareas que concentran la atención del estudiante, se favorece su disposición en esa búsqueda de la verdad, de igual forma, a través de las

diferentes sesiones de clase el docente aprende constantemente de sus estudiantes, ve cosas que no habría imaginado, fortaleciendo a la par con sus estudiantes su propio carácter intelectual, lo que permite pensar que no solo debemos esforzarnos por lograr en nuestros estudiantes el pensamiento creativo, reflexivo y crítico, sino también en nosotros mismos.

- El diálogo constante entre el estudiante y el docente fortalece un vínculo académico que permite una retroalimentación en doble vía, donde los actores están sumergidos en el desarrollo del carácter intelectual; cuando el docente acepta las ideas de sus estudiantes emerge el pensamiento reflexivo y el pensamiento crítico. Todos podemos ampliar nuestra capacidad de aprendizaje si desarrollamos carácter intelectual y el docente debe esforzarse para que sus estudiantes sigan dispuestos a pensar mejor y analizar mejor sus ideas.
- Desde las aulas de clase se debe promover el carácter intelectual, porque al desarrollar las primeras sesiones de clase E1 y E2 mostraron señales de una disposición que no se había desarrollado suficientemente, especialmente frente a las matemáticas que normalmente generan es indisposición ante la mayoría de los estudiantes.
- El conocimiento es importante, pero lo es en mayor medida, lo que los estudiantes pueden lograr a partir de dicho conocimiento: en situaciones que los invitan a dar respuestas, que les ayudan a comprender mejor, mientras favorecen su pensamiento matemático.
- La actividad generó muchas expectativas cuando E1 y E2 veían que no solo estaban presentes sus ideas, sino las de otro par académico en torno a la misma tarea, llegando a respuestas parecidas, pero por caminos diferentes.
- Cuando las estudiantes presentaron un alto grado de disposición frente a determinada actividad, potenciaron el carácter intelectual y así el pensamiento matemático se puso en manifiesto, porque este implica un despliegue de disposiciones que moldean un comportamiento que favorece la comprensión.
- Las preguntas son fundamentales ya que estas logran cautivar la curiosidad de los estudiantes y sacar de ellos respuestas que son el resultado de esa búsqueda de la verdad. Durante el desarrollo de las preguntas las dos estudiantes tenían diferentes

ideas o estrategias de solución, hasta que se decidían por la mejor de ellas, cuando estaban seguras de su proceso querían compartirlas con sus compañeros, esto evidencia la apropiación de conocimiento ya que los estudiantes hablan sobre lo que tienen certeza de tener la verdad.

- Es de esperar que las dos estudiantes tomadas como referencia puedan, a través del desarrollo del carácter intelectual, potenciar su pensamiento matemático haciendo uso de los conocimientos previos adquiridos, de sus intereses y su disposición.
- Se evidencia el impacto que se tuvo en la motivación y en la disposición de E1 y E2 frente a las matemáticas. Durante las diferentes sesiones sienten un afecto diferente hacia la asignatura, no la ven de la misma manera, se sienten capaces de hacer matemáticas a través de sus hallazgos y de sus fórmulas.
- A medida que las sesiones avanzaban, el pensamiento matemático de las dos estudiantes iba en aumento. Sus argumentos, sus hallazgos, la seguridad con la que se expresaban, hacían evidentes su pensamiento creativo, reflexivo y crítico. El carácter intelectual se daba a medida que aumentaba la disposición de E1 y E2 por ir más allá de lo que se les pregunta, porque perseveraban en esa búsqueda de la verdad.
- En una tarea de geometría la pregunta genera muy fácilmente en los estudiantes la curiosidad y una reflexión metacognitiva, que favorecen la disposición y el deseo por aprender matemáticas.
- El desarrollo de este trabajo de investigación se ve mediado por la observación meticulosa y directa de dos estudiantes (E1 y E2) seleccionadas de un grupo más amplio. El seguimiento del proceso de mejoramiento de pensamiento matemático, mediado por el desarrollo de carácter intelectual de un grupo de estudiantes resultaría demasiado dispendioso para un texto de las aspiraciones y alcances de la presente investigación, por tanto, la muestra fue reducida a sólo dos sujetos de investigación.
- Se pudo observar una buena disposición por parte de las dos estudiantes para la realización de la tarea gracias a la estrecha relación que tienen con las herramientas tecnológicas, lo cual favorece el desarrollo de este tipo de actividades.

- Si bien se encontró disposición inicial por la actividad, también se hizo evidente que al no tener claridad sobre ciertos conceptos que en este grado de escolaridad deberían estar presentes, pueden surgir dificultades en la construcción del árbol pitagórico y a su vez en la búsqueda de las relaciones solicitadas.
- Sorprendentemente la estudiante de este estudio que normalmente no obtiene buenos resultados en un esquema de evaluación por notas se atreve a opinar y a compartir sus ideas, se siente orgullosa de las cosas que va encontrando y no siente que tengan menor importancia que las de sus pares.
- El hecho de lograr la disposición de los estudiantes sin que mediara una nota para desarrollar la tarea es motivante para el docente, haciéndolo pensar sobre el verdadero sentido de enseñar matemáticas y de la evaluación misma.
- Por el desarrollo tecnológico del contexto inmediato de los jóvenes de hoy en día, ellos están dispuestos a manejar herramientas tecnológicas y por ende su desempeño es bueno en esta clase de tareas. Esta es una característica que los docentes debemos tener en cuenta para proponer tareas que favorezcan el desarrollo del carácter intelectual, ya que sin la buena disposición esto no sería posible. Observando el papel que tuvo el software GeoGebra en la intervención, se puede afirmar que E1 y E2 la ven como una herramienta que les ayuda fácilmente a verificar sus ideas, a hacer construcciones, pero entienden también que son ellas las protagonistas de su aprendizaje, porque ellas mismas son las que piensan en cómo usar el software a su favor.

5.1 Recomendaciones

A continuación, se presentarán por parte del investigador algunas recomendaciones que podrían contribuir a nuevas investigaciones relacionadas con el tema desarrollado por este trabajo. Las recomendaciones son las siguientes:

- Generalmente en clase de matemáticas, como docentes nos preocupamos porque el estudiante pueda desarrollar cierto algoritmo y resuelva problemas, lo cual no es negativo, pero el interés del estudiante se basa solamente en dar una respuesta para obtener una buena nota o la aprobación de sus pares y de su profesor. ¿Es la respuesta lo que verdaderamente importa? Probablemente para la mayoría sí, pero lo que se busca con esta serie de situaciones es que los estudiantes cada vez piensen mejor y que sean capaces de reflexionar sobre su propio pensamiento.

- Como docentes no debemos negarnos al uso de la tecnología en la que se encuentran inmersos nuestros estudiantes, quienes ya no conciben su realidad sin su teléfono inteligente, una tableta o sin un computador. No negar esta realidad nos debe llevar a la necesidad de vincular estas herramientas a nuestras prácticas pedagógicas, planteando la posibilidad de acercar nuestra área a la tecnología y mejorando la disposición de los estudiantes e ir adquiriendo el carácter intelectual. En esta investigación es evidente cómo los estudiantes disfrutaron de las actividades por el hecho de que los llevaba a su entorno natural, al espacio donde ellos suelen permanecer, la tecnología a través de GeoGebra.

- Algunos estudiantes tienen la concepción de que las matemáticas no son para ellos. Confiesan abiertamente que no les gustan y que dedican poco tiempo a estudiarla. Sin embargo, esta investigación demuestra que los estudiantes pueden ser matemáticamente competentes y desarrollar su pensamiento matemático cuando afrontan tareas que llaman su atención y ponen a prueba sus conocimientos, logrando que su disposición mejore.

- Se hace necesario profundizar en las investigaciones que pretendan vincular los recursos tecnológicos a las aulas, pues es importante considerar que la herramienta por sí sola no presta ningún beneficio si tras de ella no hay una intención pedagógica clara. De tal manera que como docentes tenemos la tarea de avanzar en los estudios de metodologías que permitan el uso apropiado de las herramientas tecnológicas en nuestras clases, la tarea de pensarse actividades que favorezcan el carácter intelectual y garantizar el aprendizaje no solo de las matemáticas sino de otros campos del conocimiento.

- Considero que una intervención pedagógica debe atravesar la práctica del docente, debe tocarla, debe transformarla; en mi caso, así como empecé a observar los avances en mis estudiantes, también empecé a notar mis propios avances, en la manera como replanteaba mis prácticas buscando que estas se ajustaran a las realidades de los estudiantes, entendiendo que la mejor manera de desarrollar el pensamiento matemático es favoreciendo su disposición a mejorar el carácter intelectual. Escuchar a los estudiantes, conocerlos, comprender lo que les gusta y desde allí trabajar junto a ellos.

- Finalmente, recomiendo como tema de otra posible investigación ¿cómo unos aportan a la construcción del pensamiento de los otros? teniendo en cuenta que hoy en día es tan importante el trabajo colaborativo y cómo se da el constructivismo, en la medida en que unas personas ayudan a otras a lograr el aprendizaje que uno de ellos no ha alcanzado, ya que el aporte de la discusión entre los compañeros fue importante en la construcción del pensamiento matemático de las estudiantes a lo largo de la intervención.

REFERENCIAS

AUSUBEL, D. P., NOVAK, J. D. y HANESIAN, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo* (2a. ed.). México D.F. México. Editorial Trillas.

BARRERA-LEÓN (2014). ¿De qué manera se diferencia el marco de la Enseñanza para la Comprensión de un enfoque tradicional? *Ruta Maestra*, edición 9. Santillana. pp 26-32.

BELLO J (2007). *Mediación del software GeoGebra en el aprendizaje de programación lineal en alumnos del quinto grado de educación secundaria*" (Tesis de maestría)

BETANCOURTH, M. MADROÑERO, E. (2014). *La enseñanza para la comprensión como didáctica alternativa para mejorar la interpretación y producción oral y escrita en Lengua Castellana en el grado quinto del Centro Educativo Municipal La Victoria de Pasto*. Universidad de Manizales. Facultad de Ciencias Sociales y Humanas. Recuperado el 20-01-2016 en: http://ridum.umanizales.edu.co:8080/jspui/bitstream/6789/1864/1/TESIS%20ENSE%C3%91ANZA%20PARA%20LA%20COMPRENSI%C3%93N.pdfhttp://ridum.umanizales.edu.co:8080/jspui/bitstream/6789/1864/1/TESIS%20ENSE%C3%91ANZA%20PARA%20LA%20COMPRENSI%C3%93N.pdf

CARRANZA, M. A. (2011). *Exploración del impacto producido por la integración del ambiente de geometría dinámica (AGD) GeoGebra en la enseñanza de los cursos de matemáticas básicas de primer semestre de la Universidad Nacional de Colombia-Sede Palmira* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Palmira, Colombia.

CRESPO, C. (2006). *Las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural*. Video Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=tL24PjD-a7w

DAVID PERKINS. (1997). *Una cultura donde el pensamiento sea parte del aire*. Entrevista en Zona Educativa. Pág. 39.

DAZA L, (2012). *Interpretación de la factorización a través del uso del GeoGebra*. (Tesis de pregrado) Universidad de Antioquia. Recuperado de: http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/1767/1/JC0790.pdf

DEBÁRBORA N (2012). *El uso del GeoGebra como recurso educativo digital en la transposición didáctica de las funciones de proporcionalidad*. (Tesis de maestría) Universidad Nacional de San Martín.

ELDER, L., PAUL, R., DE PENSAMIENTO CRÍTICO, C., & SOCRÁTICOS, P. (2002). *El arte de formular preguntas esenciales*. *Basado en conceptos de pensamiento crítico y principios socráticos. Fundación para pensamiento crítico*, pp. 1-39.

GARCÍA, M. D. M. (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula* (Tesis doctoral). Universidad de Almería.

GARDNER, HHOWARD. (2001). *Estructuras de la Mente. La Teoría de Las Inteligencias Múltiples.* Fondo de Cultura Económica LTDA.

HAREL, G., & SOWDER, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical thinking and learning, 7*(1), 27-50.

HOLLEBRANDS, K. F., CONNER, A., & SMITH, R. C. (2010). *The nature of arguments provided by college geometry students with access to technology while solving problems*. Journal for Research in Mathematics Education, 324-350.

LINCK, L. (2013). *Pensamiento visible*. 24 septiembre. Sitio web: https://www.usfq.edu.ec/publicaciones/para_el_aula/Documents/para_el_aula_07/0003_para_el_aula_07.pdf

MARTÍNEZ, J. (2011) *Métodos de investigación cualitativa*. En *Revista Silogismo*, volumen 8. Julio – Diciembre. Bogotá, Colombia.

MENDOZA S, PABÓN J (2013) *Propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en niños de 5 años*. Colegio Bilingüe Real Americano. Bogotá, Colombia.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL DE COLOMBIA. *Estándares básicos de competencias en matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!* Pp. 46 a 79.

NOVAK, J. D. y GOWIN, B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Martínez Roca. Barcelona.

OSUNA S (2008) "*El aprendizaje de las matemáticas en alumnos de ingeniería electrónica del instituto tecnológico de Mazatlán, Sinaloa*." México.

PAUL, R. y ELDER, L. (2002). *El arte de formular peguntas esenciales*. Foundation for Critical Thinking. Recuperado de: https://www.criticalthinking.org/resources/PDF/SP-AskingQuestions.pdf.

PEDRAZA, F., BERNAL, R., & MORA, A. (2014). *Sistema nacional de evaluación estandarizada de la educación*. Alineación del examen Saber, 11, 2014-2.

PEÑA-LÓPEZ, I. (2012). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework. Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*.

PIAGET, J. INHELDER, B. (1958). *Growth of Logical Thinking*. New York: Basic Books.

POGRÉ, P (2007). *¿Cómo Enseñar para que los Estudiantes Comprendan?* Diálogo Educ., Curitiba, v. 7, n. 20, p. 25-32, jan./abr. 2007

PRESMEG, N. C. (2006). *Research on visualization in learning and teaching mathematics. Handbook of research on the psychology of mathematics educatioeducation.* Rotterdam, Inglaterra. Sense Publishers.

QUINTERO E. (2014). *Dificultades que identifican los estudiantes a través de la metacognición en el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria*. (Tesis de maestría) Universidad Autónoma de Manizalez.

RITCHHART, R. (2002). *Intellectual Character. What it is, why it matters, and how to get it.* San Francisco, Estados Unidos. Jossey Bass.

RITCHHART, R. (2015). *Creating cultures of thinking: The 8 forces we must master to truly transform our schools.* John Wiley & Sons.

TORRES C. Y RACEDO D. (2006) *Estrategia didáctica mediada por el software GeoGebra para fortalecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría en estudiantes de 9° de básica secundaria.* (Tesis de maestría) Universidad de la costa "CUC"

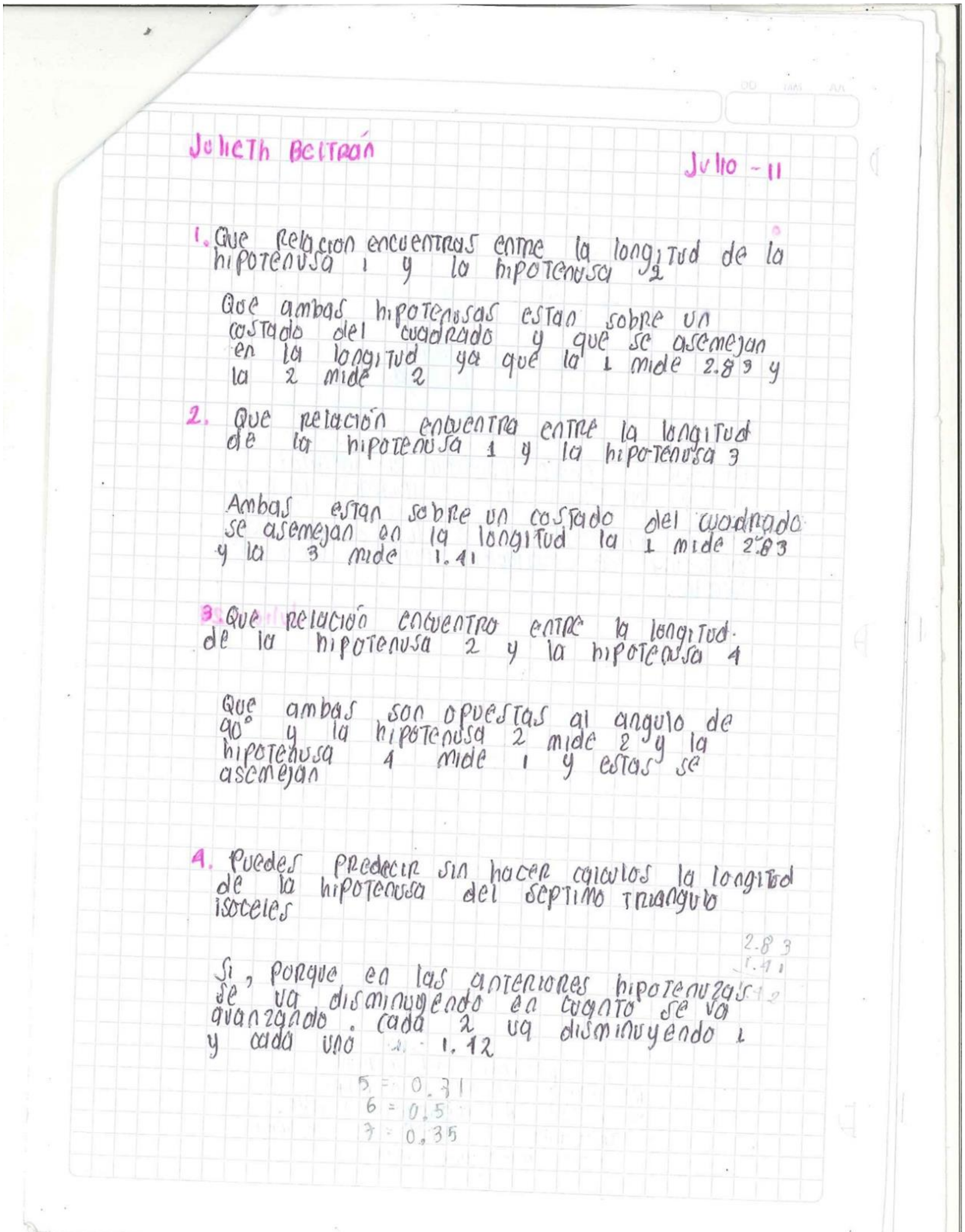
VALLEJO G (2011) *Evaluación de un programa para el desarrollo del pensamiento formal en estudiantes del décimo año de educación básica de la unidad educativa "Tumbaco" de la ciudad de Quito*. (Tesis de maestría) Universidad técnica Particular de Loja.

VÁZQUEZ, RECIO, R (2011). *Enseñanza para la comprensión: el caso de la escuela rural de Bolonia.* Cádiz, España. Recuperado el: 02-05-2014 en: http://www.rieoei.org/rie57a08.pdfhttp://www.rieoei.org/rie57a08.pdf

WISKE, M. S. (Comp.). (2003). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Buenos Aires, Barcelona, México. Paidós.

ANEXOS

ANOTACIONES E1



Julieth Beltrán

Julio - 11

1. Que relacion encuentras entre la longitud de la hipotenusa 1 y la hipotenusa 2

Que ambas hipotenusas estan sobre un costado del cuadrado y que se asemejan en la longitud ya que la 1 mide 2.83 y la 2 mide 2

2. Que relación encuentra entre la longitud de la hipotenusa 1 y la hipotenusa 3

Ambas estan sobre un costado del cuadrado se asemejan en la longitud la 1 mide 2.83 y la 3 mide 1.41

3. Que relación encuentro entre la longitud de la hipotenusa 2 y la hipotenusa 4

Que ambas son opuestas al angulo de 90° y la hipotenusa 2 mide 2 y la hipotenusa 4 mide 1 y estas se asemejan

4. Puedes predecir sin hacer calculos la longitud de la hipotenusa del septimo triangulo isoceles

2.83
1.41
2

Si, porque en las anteriores hipotenuzas se va disminuyendo en cuanto se va avanzando. cada 2 va disminuyendo 1 y cada uno 1.12

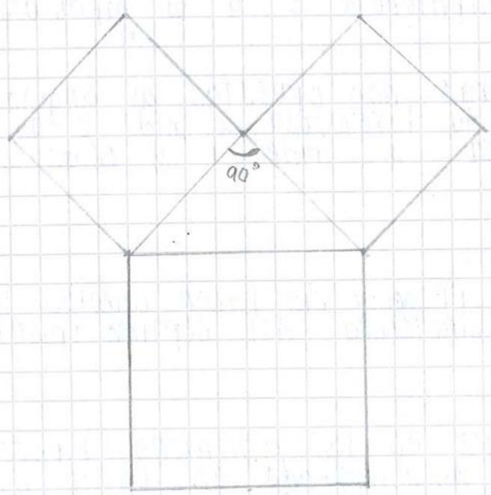
5 = 0.71
6 = 0.5
7 = 0.35

- la hipotenuza 7 podria medir 0,35 ya que la hipotenusa 3 mide la mitad de la 1, la 4 la mitad de la 2 la 6 la mitad de la 4 y la 7 la mitad de la 5.

Entonces se calculan cada 2 las mitades para formar las parejas

En caso de poder predecir la longitud de la hipotenusa del 7 triangulo rectangulo isoceles escriba una formula que le permita predecir la longitud de ~~ever~~ la hipotenuza de cualquier triangulo rectangulo isoceles

Julio - 24



la hipotenusa del triangulo rectangulo isoceles esta sobre un costado del cuadrado y sobre el triangulo se tienen que construir dos cuadrados mas.

Julieth Beltrán - 10-01

Julio - 04

Para hacer el cuadrado yo le di en la opción polígono y daba varias opciones y pues le di en polígono regular porque el cuadrado tiene sus lados iguales luego seleccione un punto cualquiera en la recta y me salio número de vertices y seleccione cuatro y ya me construyo el cuadrado

1. Construya un cuadrado

2. Construya un triangulo isoceles rectangulo cuya hipotenuza sea 1 de los lados del cuadrado

3. Construya un cuadrado en cada lado del triangulo

4. Repita el proceso una y otra vez

Luego de tener mi cuadrado lo siguiente que hice fue darle en poligono y seleccione una esquina del cuadrado y luego 2 veces abajo puse el otro punto y luego puse el ultimo punto en la otra esquina y me salio luego tuve que poner cuadrados en los costados del triangulo isoceles pero la hipotenuza tiene que ser uno de los lados del cuadrado y el angulo de 90° tiene que ser el opuesto de la hipotenusa. Luego de esto tuve que hacerlo una y otra vez.

Julio - 06

Hoy sigo haciendo una y otra vez la misma actividad, pero resulta que quiero poner los cuadrados y no se ponen donde yo quiero y creo que es porque estoy seleccionando mal los puntos y intente muchas veces y me di cuenta que tienen un orden.

Tambien intente ponerle color a los poligonos pero no pude porque no me sale la barra de color y pues se acabo la clase pero la proxima lo intentare de nuevo.

El profesor nos pidio que al mover el poligono del triangulo pasara como el cuadrado que aumenta su tamaño pero no cambia su forma y utilice la otra parte de geogebra para intentarlo pero no me funciono la idea que tenia.

Mi idea era darle en poligono y seleccionar la opcion de poligono estatico y asi no cambiaba su forma pero cuando puse el cuadrado he intentaba aumentar y disminuir su tamaño no lo hacia solo se movia asi que este no me servia. Y entonces intente con poligono vectorial pero tampoco me funciono en el tiempo que intente que en realidad fue muy corto y pues en ese tiempo intente ponerle un punto en la esquina que le faltaba pero no funciono.

Tambien para asegurarme que era un triangulo rectangulo isoseles use la opcion Angulo y hay me media el triangulo y me salia 90

Julieth Beltrán

Julio - 11

1. Que Relacion encuentras entre la longitud de la hipotenusa 1 y la hipotenusa 2

Que ambas hipotenusas estan sobre un costado del cuadrado y que se asemejan en la longitud ya que la 1 mide 2.83 y la 2 mide 2

2. Que relación encuentra entre la longitud de la hipotenusa 1 y la hipotenusa 3

Ambas estan sobre un costado del cuadrado se asemejan en la longitud la 1 mide 2.83 y la 3 mide 1.41

3. Que relación encuentro entre la longitud de la hipotenusa 2 y la hipotenusa 4

Que ambas son opuestas al angulo de 90° y la hipotenusa 2 mide 2 y la hipotenusa 4 mide 1 y estas se asemejan

4. Puedes predecir sin hacer calculos la longitud de la hipotenusa del septimo triangulo isosceles

2.83
1.41
2

Si, porque en las anteriores hipotenuzas se va disminuyendo en cuanto se va avanzando. cada 2 va disminuyendo 1 y cada uno 4 1.12

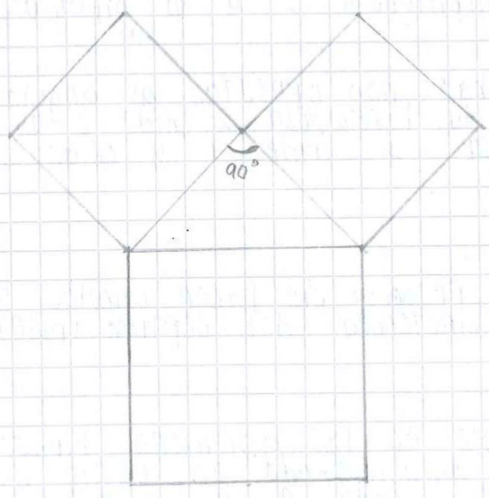
5 = 0.71
6 = 0.5
7 = 0.35

- la hipotenuza 7 podria medir 0,35 ya que la hipotenusa 3 mide la mitad de la 1, la 4 la mitad de la 2 la 6 la mitad de la 4 y la 7 la mitad de la 5.

Entonces se calculan cada 2 las mitades para formar las parejas

En caso de poder predecir la longitud de la hipotenusa del 7 triangulo rectangulo isoceles es criba una formula que le permita predecir la longitud de ~~eua~~ la hipotenuza de cualquier triangulo rectangulo isoceles

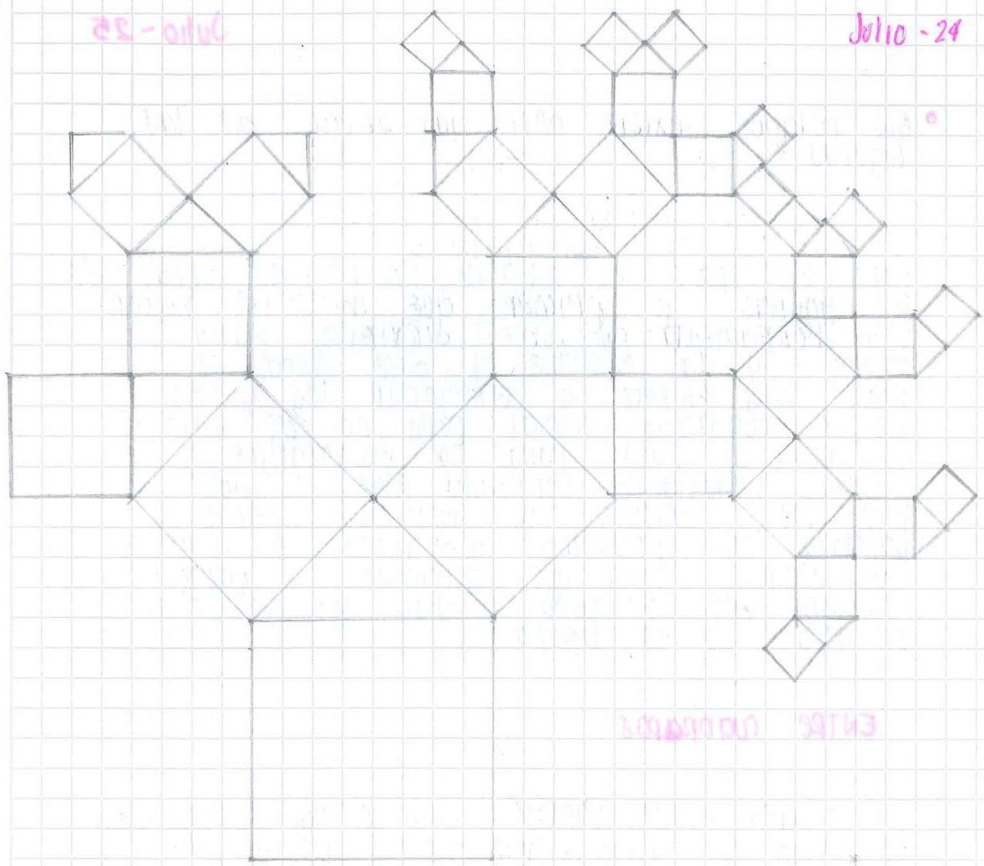
Julio - 24



la hipotenusa del triangulo rectangulo isoceles esta sobre un costado del cuadrado y sobre el triangulo se tienen que construir dos cuadrados mas.

Julieth Beltran 10-01

Julio - 24



Julio - 25

• Que relación existe entre las areas de las figuras ?

Para encontrar la relación entre las areas de las figuras lo primero que hice fue buscar una herramienta que me sirviera para hacerlo, y la encontre y dice Area y pues hay empece a seleccionar los puntos de mi cuadrado inicial pero no me salia el area, y pues para no equivocarme y despues resultando borrando Algo, lo que hice fue construir un triangulo aparte y resolver ese problema y luego me di cuenta que solamente tenia que seleccionar la parte interior del poligono y hay ya me salia el area de la figura

ENTRE CUADRADOS

la relación entre cuadrados es que van disminuyendo de mitad en mitad, quiere decir que si el cuadrado 1 mide $8\,cm^2$ el cuadrado 2 mide $4\,cm^2$ y hasi sucesivamente

Poligono 1 = 8
Poligono 2 = 4
Poligono 3 = 2
Poligono 4 = 1
Poligono 5 = 0.5
Poligono 6 = 0.25
Poligono 7 = 0.13

Disminuye de mitad en mitad

Julieth Beltran - 10-01

ENTRE TRIANGULOS

Entre triangulos pasa lo mismo que entre cuadrados va disminuyendo de mitad en mitad, el primer triangulo mide 2 y si se le saca mitad seria 1 y esa es la area del triangulo dos y el proceso se repite

Poligono 1 = 2
Poligono 2 = 1
Poligono 3 = 0.5
Poligono 4 = 0.25
Poligono 5 = 0,13
Poligono 6 = 0.06

$$91 \div 2 = 45$$

$$2n \div 2$$

$$n_1 = \frac{n_1}{2^0}$$

$$\underset{2+1}{n_3} = \frac{n_1}{2^1}$$

$$\underset{3+2}{n_5} = \frac{n_1}{2^2}$$

$$\underset{4+3}{n_7} = \frac{n_1}{2^3}$$

$$\underset{5+4}{n_9} = \frac{n_1}{2^4}$$

$$\underset{45+46}{n_{91}} = \frac{n_1}{2^{45}}$$

$$\underset{51+50}{n_{101}} = \frac{n_1}{2^{50}}$$

$$101 \div 2 = 50$$

$$n_3 = \frac{n_1}{2^3}$$

$$93 \div 2 = 46$$

$$\underset{46+47}{n_{93}} = \frac{n_1}{2^{46}}$$

$$93 = 2(46) + 1$$
$$92 + 1$$
$$93$$

Para hallar la formula fue lo que hice fue escribir el numero de la hipotenusa que queria hallar que este caso fue 101 entonces esta es igual a la primera hipotenusa que haye (n_1) sobre dos elevado a la incognita porque no se sabe a que número se eleva y para hallar este número hay que dividir la hipotenusa (101) en 2 y cuando se divida el número del cociente es el exponente del 2.

Agosto -07

$$n_{101} = \frac{n_1}{2^{?}}$$

Incognita

Hipotenusa

Se divide 101 en 2

$$\begin{array}{r|l} 101 & 2 \\ 01 & 50 \end{array}$$

Este número seria nuestra incognita

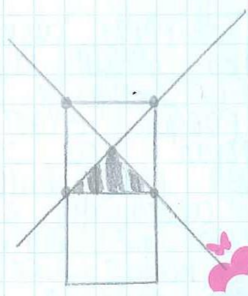
$$n_{101} = \frac{n_1}{2^{50}}$$

Me causo Algo de curiosidad ver si despues de todo si servia mi formula y al final me di cuenta que si servia pero esta solo sirve para los impares y tengo que mirar una para las hipotenusas pares

Agosto - 11

- Existira otra forma de solucionar los problemas que se le plantearon anteriormente

Si digamos para hacer el triangulo rectangulo isoceles porque otra manera que encontre fue que encima del cuadrado en que iva a poner el triangulo ponia un cuadrado y le daba en la opcion de recta a partir de dos puntos y seleccionaba la dos diagonales del cuadrado y luego hacia lo mismo con las otras diagonales, luego se formaba un triangulo rectangulo isoceles.



- Que le despertó curiosidad de los ejercicios
- Quisiera saber algo más que no ha indagado ni preguntado
- Se le ocurre pensar si ha sus compañeros se les ocurrió las mismas preguntas que a usted.

- Pues muchas cosas me llamaron la atención, como saber si la figura que se formaba al final cuando ya se cerraba la figura se le podía sacar area y todo eso que decía en la pregunta de la relación de las figuras

Tambien me desperto curiosidad cuando intentaba sacar la formula para cualquier hipotenusa impar porque encontre que tenian una secuencia y pues pude hallar y darme cuenta que esa secuencia me servia para hallar hipotenusas cercanas como 7, 9 pero

Para lejanas como 101 y 103
no y pues luego descubri
que me hacercaba a un buen
resultado

• si como la area de la figura
si hay relación entre cuadrados
y triangulos

• si yo creo que si porque
muchos pueden hacerse preguntas
como será que voy bien,
esto sera así cosas así
y pues muchos pensamos igual
y pudimos haber llegado a esos
resultados

• Cuando encontro la manera de
solucionar los problemas planteados
como lo hizo

Pues solo me lleve por lo que
se me ocurria y algunas cosas
que hemos visto en la eme
y trataba de ver si me
funcionaban y analisar bien
los problemas.

• Pues no serán las me
creo que fueron la
adecuados que pudo e
tratar de solucionar

• Cree usted estar seguro de la beracidad de sus respuestas a los problemas que le fueron planteados ¿por qué?

• Como cree usted ó cree saber que sus afirmaciones son ciertas

• Si, yo me asegure de mirar todo desde diferentes puntos y afirmar mis respuestas

• Pues yo verifique mucho y rectifique cada cosa

Estas seguro de que esas fueron las mejores respuestas que usted pudo encontrar

Le interesa encontrar una solucion adecuada a esas preguntas

Porque es importante para usted comprender las preguntas y las soluciones

estan seguro de la
de sus respuestas
blemas que le fueron
¿por qué?
usted ¿cree saber que
ciones son ciertas

• Pues no serán las mejores pero creo que fueron las más adecuadas que pude encontrar para tratar de solucionar los problemas

• Si, obviamente porque así me daría cuenta de mis errores y trataría de mejorarlas y además sabría más.

• Porque podría mirar si llegue ha estar cerca del resultado correcto.

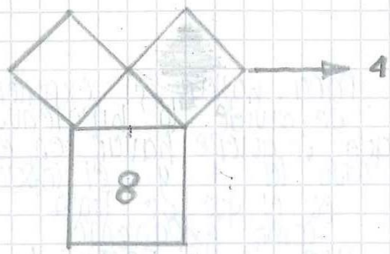
Que tanto le ayudo geogebra a encontrar la respuesta a los problemas

• Pues me ayudo mucho porque hay podía mirar y analizar todo de una manera diferente

© EDITORA ABRIL S.A.

Julieth Beltrán 10 -01

Agosto - 28



Al comienzo no encontraba una relación entre la hipotenusa 1 y la 2 pero pensé que prodría existir una relación entre las áreas de los cuadrados porque uno era la mitad del otro y estos tenían como lados las hipotenusas

$$4 = \frac{8}{2}$$

$$4 = A\square_1$$

$$4 = \frac{n_1 \cdot n_1}{2}$$

$$4 = \frac{n_1^2}{2}$$

Luego me doy cuenta que la hipotenusa 1 por la hipotenusa 1 me da el área del cuadrado y pues por lógica la hipotenusa 2 por la hipotenusa 2 me da el área del cuadrado 2. y pues sabiendo esto puedo hallar una ecuación

$$A\square_2 = \frac{n_1^2}{2}$$

$$n_2 \cdot n_2 = \frac{n_1^2}{2}$$

$$\sqrt{n_2^2} = \sqrt{\frac{n_1^2}{2}}$$

$$n_2 = \sqrt{\frac{n_1^2}{2}}$$

Esta es mi ecuación

Propuesta ✓

PRUEBA O COMPROBACIÓN

$$n_4 = \frac{\sqrt{\frac{n_i^2}{2}}}{2^{?}}$$

Para hallar el exponente se divide la hipotenusa que se quiere hallar en este caso la 4 y el cociente es el que se toma como exponente. pero se le resta 1

$$n_4 = \frac{\sqrt{\frac{8}{2}}}{2^{1}}$$

$4 \div 2 = 2$

$2 - 1 = 1$

$$n_4 = \frac{\sqrt{4}}{2}$$

$$n_4 = \frac{2}{2}$$

$n_4 = 1$ ✓ Comprobación

• Generalización!

Y si lo quiero sacar en un número grande también funciona

$$n_{100} = \frac{\sqrt{\frac{n_i^2}{2}}}{2^{?}}$$

$100 \div 2 = 50$

$50 - 1 = 49$

$$n_{100} = \frac{\sqrt{4}}{2^{49}}$$

$$\boxed{n_{100}} = \frac{2}{2^{49}} = 2^{-48}$$

n_{20}.

$$n_{10} = \frac{\sqrt{4}}{2^4} = 2^{-3} = 0{,}125$$

ANOTACIONBES E2

ERIKA JIMENEZ

Geogebra

introducción

1. Construye un cuadrado
2. Construya un triangulo isoceles rectangulo cuya hipotenusa sea 1 de los lados del cuadrado
3. Construya un cuadrado en cada 1 de los lados del triangulo
4. Repita el proceso 1 y otra vez

Desarrollo

Al ingresar al programa geogebra y leer las instrucciones intente hacer el cuadrado, pero estaba usando la herramienta de poligonos y cuando iba a hacer el triangulo no me aparecia una linea recta si no un (lapiz) rayón segun el movimiento del mause. Cuando intente con la opcion de poligono regular el cuadrado ya daba exacto y intente con poligonos y logre hacer una parte de la figura.

Cuando complete todos los pasos me di cuenta que al mover el punto del triangulo se deformaban todas las figuras. logre solucionar este problema usando la funcion de limitar punto

Primavera

5. Que relacion encuentra entre la longitud de la hipotenusa 1 y la hipotenusa 2

6 Que relacion encuentra entre la hipotenusa 1 y la hipotenusa 3

7 Que relacion encuentra entre la longitud de la hipotenusa 2 y la hipotenusa 4

8 Puedes predecir sin hacer calculos la magnitud de la hipotenusa del 7 triangulo rectangulo

Desarrollo

5 la altura del triangulo 1 es igual a uno de los lados de la hipotenusa 2

6 la hipotenusa del triangulo 4 es igual a los lados del triangulo 2

24/07/2017

(a

la altura del triangulo 1 es igual a la hipotenusa del triangulo 4 y tambien es igual a los lados del triangulo 2

a. Reviso nuevamente y me doy cuenta q' el valor tiene una diferencia de 0,20

$10 \,|\, 8$

$1,25$

$\ell_6 = 7,06$ $\quad$ $b \cdot p + 1$

$1 \, 10 = 1,25$ $\quad$ 7.5

$10 \,|\, 12$

$0,83$

$B^7 = 0,85$

$\boxed{\dfrac{b}{N\Delta + 1}}$

Al seguir intentando me di cuenta q' la longitud del primer triangulo era 10 y q' el n° del triangulo + 1 me daba la longitud del 7 triangulo

Erika Jimenez Marulanda 10°01

8 No, porque desde el 5 o 6 triangulo los cuadrados se inician a unir y eliminan la posibilidad de que se pueda construir

Me di cuenta de que NO podia ser posible entonces busque otra respuesta.

Y pienso que la abertura del angulo de la hipotenusa y el cateto es igual a el triangulo 7 porque el triangulo cada vez es mas pequeño pero las hipotenusas siguen teniendo relacion por lo que creo que el triangulo 7

9. En caso de poder predecir la longitud de la hipotenusa del 7 triangulo rectangulo isosceles escriba una formula que le permita predecir la longitud de (cualquier) la hipotenusa de cualquier triangulo rectangulo isosceles

$\frac{\text{base}}{\text{n° triangulo}}$

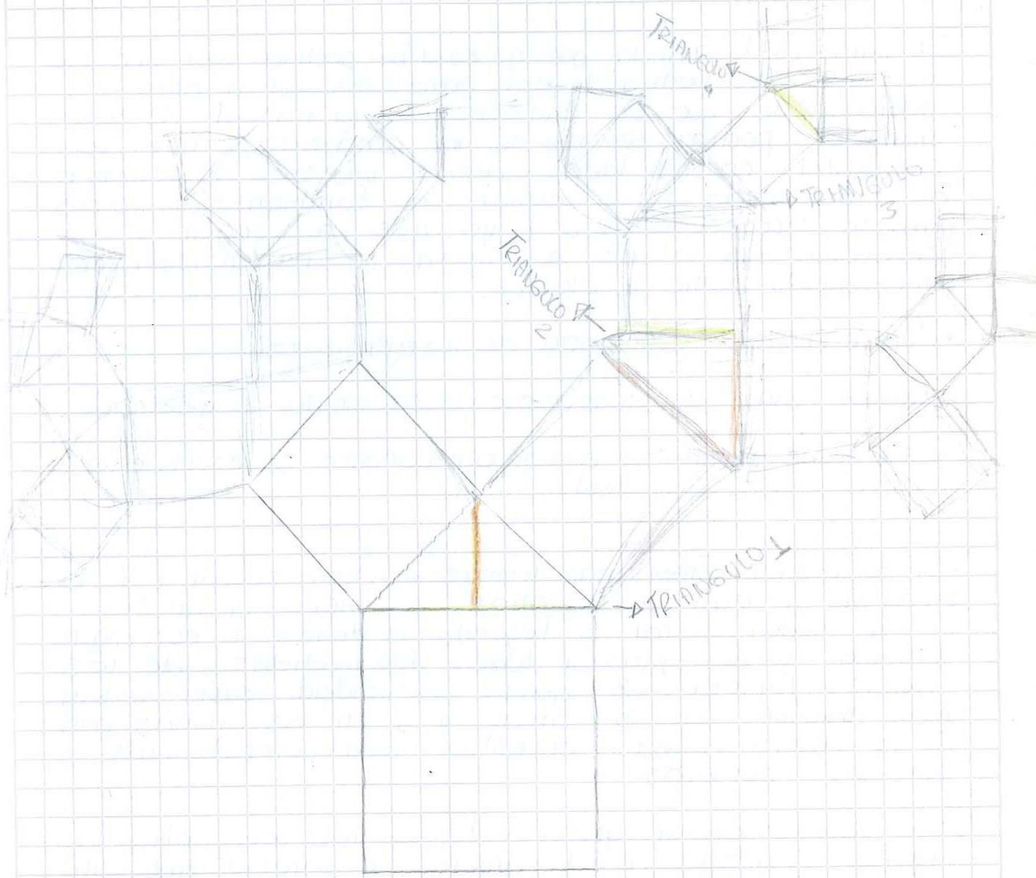
base = 10

10 | 7
30 1,428
20
60
4

Se divide en 7 por ser el septimo triangulo y despues se verifica y es correcto

Primavera

ERIKA JIMENEZ 10°01



10. Que relacion existe entre los areas de las figuras.
Que la altura de muchos triangulos coincide con los lados de otros triangulos

• Existirá otra forma de solucionar los problemas que se le plantearon anteriormente

Si, para mi la formula que yo escribí podria ser una de las miles que podria haber para solucionar esto, ademas de que las divisiones en la mitad de varios triangulos podria ser uno de los cuadrados que se encuentra en sus lados o (ad)las relaciones que tienen las hipotenusas 1 y 2 podrian ser tambien acertadas para la hipotenusa 2 y 4 ya que por seguir una secuencia que la da su figura se pueden dar mas coincidencias entre su relación

• ¿Que le desperto curiosidad de los ejercicios?

• ¿Quisiera saber algo mas que no ha sabido o indagado?

• ¿Se le ocurre pensar si a sus compañeros se les ocurrio lo mismo que a usted?

• Si se podrian crear mas ramas, es decir seguir con la secuencia y llegar a encontrar si tiene un limite, si se pueden cerrar si llegando a dividir o con alguna formula puedo predecir todas las medidas de las figuras, tambien me genera curiosidad saber si hay mas relacion en las areas y si en las ultimas partes de la figura puedo encontrar mas coincidencias con las primeras

• Me sorprendi al ver que si habia relacion entre las figuras por que cuando inicie me parecio que esto era imposible que sus longitudes no me darian ninguna relacion por que eran totalmente opuestas pero eran seguidos y todo tenia que ver con otra cosa

• A mi me parece que si, creo que todos nos fijabamos en las mismas cosas y buscabamos aplicarle lo teorico para encontrar la solución, hacer operaciones y medir y por eso creo que se nos dificulto un poco por falta de analizar bien, por que una vez concentrados ya fue mas facil ver todas las relaciones

• Cuando encontro la manera de solucionar los problemas planteados como lo hizo

• Buscar la mayoria de similitudes en la longitud y comparar, despues lo comprobe con las herramientas de Geogebra y escribi lo que creia, en los que podia comprobar

- • Cree usted estar seguro de la veracidad de sus respuestas a los problemas que le fueron planteados ¿Por que?

• Como sabe usted o cree saber que sus afirmaciones son ciertas

• No estoy segura en algunos puntos por que habia una similitud para mi en varios casos pero no eran exactos fueron a mi criterio y analisis

• Pues segun lo que yo lograba observar y la similitud que encontre logre probar varias afirmaciones que me hice dandoles exactitud por eso creo que la mayoria son verdaderas porque logre comprobarlo teoricamente

• Esta segura de que estas fueron los mejores respuestas que usted pudo encontrar

• Le intereza encontrar una solución adecuada a esas preguntas ¿Por que?

• Por que es importante para usted comprender las preguntas y las soluciones

© EDITORA ABRIL S.A.

• No creo que pude describir mas lo que encontraba y analizar mas para encontrar mayores respuestos y posibles solucionos creo que me falto mayor concentracion para redactar muchas ideas

• Si por que me gustaria saber exactamente la solución que similitudes tiene lo que yo encontre, y que me falto para llegar a eso

• Por que si no entiendo lo que me estan preguntando no voy a poder analizar y encontrar nada y aunque la solucion sea facil no podre hallarla, y si no se entiende la respuesta puede que haya

• Que tanto le ayudo Geogebra a encontrar la respuesta a los problemas?

▸ encontrado algo diferente y correcto pero si no hay claridad no habre logrado nada

Nombre: Erika Jimenez Maldonado
Curso: 10°01

28/08/2017

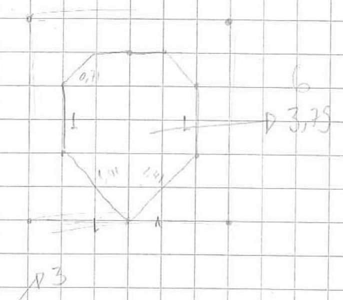
$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$

Base del Triangulo 1 = 2

$\Delta = 2$ la diferencia es de 0,49 a $\Delta 2$

$\Delta 3 = 1$ Δ $\frac{1}{2}$ de $\Delta 1$

Si $\Delta 1$ es 2^{-1} de $\Delta 3$; el $\Delta 1 = \frac{1}{4} = \square 1$
entonces Δ siempre sera $\frac{1}{4}$ del cuadrado ó 2^{-4}



Cada 2 $\square\square$ son 1

$2\square$ en / = 1,41

$1\square$ en / = 0,71

$1\square$ = 0,5

Erika Jimenez Marulanda 10°01

Entonces me surgio la pregunta de las relaciones entre los cuadrados y si la ecuación creada anteriormente podria servir tambien para los □

$$\square_2 = \frac{1}{2} \cdot \square_1$$

$$\square_2 = \frac{1}{2} \cdot 100$$

$$\square_2 = \frac{100}{2} = 50$$

$$\square_1 = (10)^2$$

$$\square_1 = 100$$

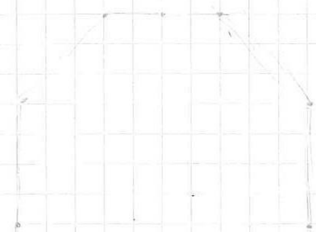
$$\square_2 = (7,07)^2$$

$$\square_2 = 49,98$$

Y me di cuenta que la formula tambien se puede usar para los cuadrados.

ERIKA JIMENEZ MARULANDA 10°01

Otra cosa que me habia llamado la atencion fue las figuras que se formaban entre las ramas



Usando la herramienta calculo el area de esta figura y segun mis construcciones sus areas son:

⬡1 = 93,72

⬡2 y ⬡3 = 46,86

⬡4 y ⬡5 = 23,43

y me doy cuenta que se siguen cumpliendo la relacion de los △ y □

⬡2 = $\frac{1}{2}$ · 93,72

⬡2 = $\frac{93,72}{2}$

l^3 = 12,6

l3 = 2,5
3,54
5
7,07

Erika Jiménez Marulanda 10°01

Si el Δ_2 es la mitad del Δ_1 y la altura no es su hipotenusa, pertenece a 1 de los catetos y si el cateto "!" es la hipotenusa del siguiente triangulo la altura del $\Delta_1 = h\Delta_3$ al momento de verificar me di cuenta que era verdadero lo que queria decir que en base al Δ_1 se podrian conocer las alturas y areos deriva(dos) triangulos de toda la construccion

$a = \frac{h_1}{2}$

$a = h_3$

$h_5 = 2^{-2} \cdot h_1$

$h_5 = \frac{1}{4} \cdot 10$

$h_5 = \frac{10}{4} = 2{,}5$

$h_7 = 2^{-3} \cdot h_1$

$h_7 = \frac{1}{8} \cdot 10$

$h_7 = \frac{10}{8} = 1{,}25$

Al verificarlo con las alturas q' nos pueden decir las longitudes de las hipotenusas me doy cuenta que es correcto que podemos conocer el area de todos los triangulos y sus hipotenusas con base en el primer triangulo

Se encontró el exponente del numero del triangulo q' queriamos llegar buscando que al multiplicar el exponente con la base y sumarle 1 nos de el numero del triangulo es decir 8

Si buscamos conocer tanto el area como la hipotenusa del $\Delta 9$ veamos la base

$2^{\square}$ El numero menor que al multiplicarse por 2 es el mas cercano a 9 es el 4 ya que

$2 \cdot 4 = 8$ y $8 + 1 = 9$ entonces el exponente es -4 siempre negativo

$2^{-4} = \frac{1}{16}$

$h_9 = 2^{-4} \cdot h_1$

$h_9 = \frac{1}{16} \cdot h_1$

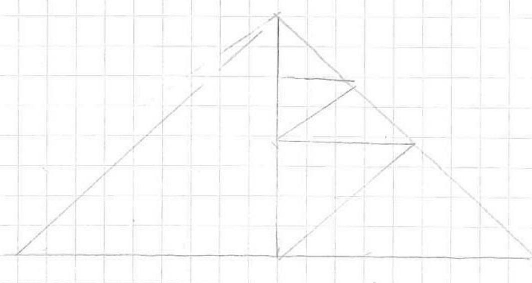
$h_9 = \frac{10}{16} = 0{,}63$

$\Delta 9 = \frac{1}{16} \cdot \Delta_1$

$\Delta 9 = \frac{1}{16} \cdot 25$

$\Delta 9 = \frac{25}{16} = 1{,}5$

Con lo que encontre sobre las alturas y el primer triangulo decidi construirlo desde el primer triangulo todos los triangulos



Y se iban formando los otros triangulos de la contruccion y decidi buscar si el area de una cantidad definida de triangulos podrian sumar la del Δ_1

Entonces calcule el area de los triangulos del 2 al 7

$$\Delta_2 = \frac{b \cdot a}{2}$$

$$\Delta_2 = \frac{7{,}07 \cdot 3{,}535}{2}$$

$$\Delta_2 = 12{,}5$$

$$\Delta_3 = \frac{5 \cdot 2{,}5}{2}$$

$$\Delta_3 = 6{,}25$$

$$\Delta_4 = \frac{3{,}54 \cdot 1{,}77}{2}$$

$$\Delta_4 = 3{,}125$$

$$\Delta_5 = \frac{\Delta_4}{2} = 1{,}5625$$

$$\Delta_6 = 0{,}79$$

$$\Delta_7 = 0{,}4$$

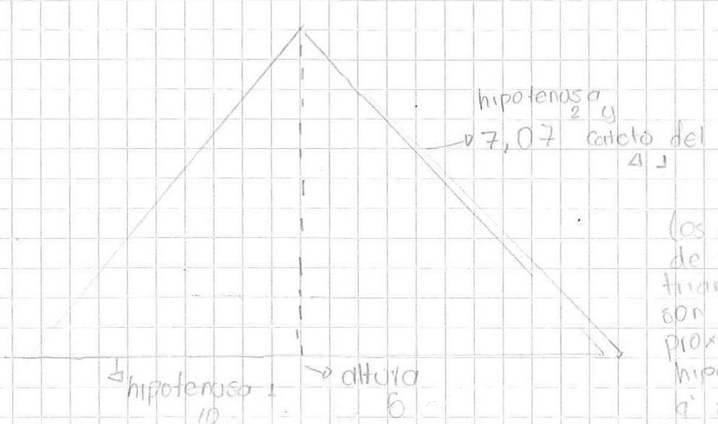
Y cuando las sume me di cuenta que era verdadero la suma de los triangulos de toda la construccion es igual al area del Δ_1

2.

Erika Jimenez Marulanda 10°01

30/08/2017

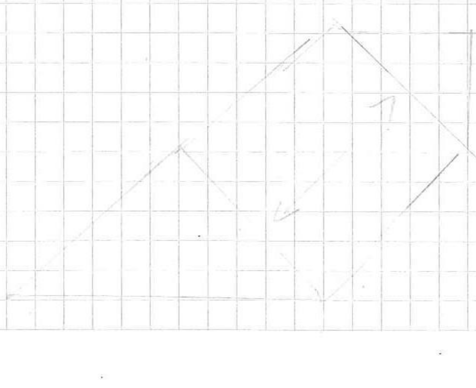
Mi idea principal era que la altura del triangulo 1 era igual a la hipotenusa del triangulo 2 pero cuando hice la verificación me di cuenta que no era así según las longitudes de mi construcción había una diferencia de 2,07



los catetos de los triangulos son la proxima hipotenusa q' se encontrara en la construccion

$$a = \frac{h_1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

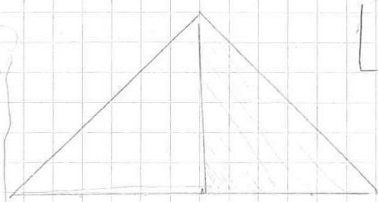
Al seguir observando me di cuenta que la altura del triangulo 1 media lo mismo que uno de los catetos del triangulo 2 y me hizo recordar lo que habia observado anteriormente que los catetos son la siguiente hipotenusa de la ecuacion y me genero una gran curiosidad saber si esto era verdadero, segun esto el cateto del triangulo 2 media lo mismo que la hipotenusa 3 al verificar vi que mi idea era correcta.



Al seguir comparando las longitudes vi una similitud, si las figuras se iban dividiendo en mitades al ir construyendose mas tenian una relacion con la anterior, que se basaba en mitades al igual que la altura

$$a = \frac{h_1}{2}$$

Entonces en triangulo 2 era la mitad del triangulo 1 y al verificarlo vi qeria verdadero



$$\boxed{\Delta_2 = \frac{1}{2}\,\Delta_1}$$

$$\Delta_2 = 12,5$$

$$\Delta_1 = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta_1$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{2} \cdot 25$$

$$\Delta_2 = \frac{25}{2} = 12,5$$

$$\Delta_3 = \frac{b \cdot a}{2}$$

$$\Delta_3 = \frac{5 \cdot 2,5}{2} = \frac{12,5}{2} = 6,25$$

$$\Delta_4 = \frac{3,54 \cdot 1,77}{2} = \frac{6,2658}{2} = 3,1329$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{4} \cdot \Delta_1$$

$$\Delta_3 = \frac{25}{4}$$

$$\Delta_4 = \frac{1}{8} \cdot \Delta_1$$

$$\Delta_4 = \frac{25}{8}$$

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

CONSENTIMIENTO INFORMADO E1

Bogotá, 6 de febrero de 2017

Señores
Padres de familia
Grado Décimo
Colegio Próspero Pinzón IED

Asunto: **CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPANTES EN PROYECTO DE INVESTIGACIÓN**: "La integración de GeoGebra en el desarrollo del carácter intelectual"

Cordial saludo.

Muy respetuosamente invito a su hija a participar en un proyecto de investigación destinado a describir rasgos de carácter intelectual (Ritchhardt, 2002) en el desarrollo del pensamiento matemático de dos estudiantes de grado décimo del Colegio Próspero Pinzón IED a partir de una tarea de geometría mediada por el software Geogebra, cuyo investigador responsable es el Lic. Jonathan Eduardo Ruiz Ramírez, estudiante de la Maestría en Educación de la Universidad Externado de Colombia.

Para el siguiente proyecto, fueron seleccionadas dos estudiantes de grado décimo del Colegio Próspero Pinzón IED. La decisión de que su hija participe en este proyecto es completamente voluntaria, usted puede decidir en cualquier momento dejar de participar e interrumpir el estudio si así lo desea. Si usted decidè participar, este consentimiento le otorgará la información necesaria sobre el proyecto tales como, el propósito, en qué consiste y cómo se llevará a cabo.

¿Qué implica la participación de mi hija en este proyecto?

Su hija será invitada a realizar en el horario de clases una tarea de geometría mediada por el software GeoGebra en forma individual.

La participación de su hija en esta investigación no supondrá ningún beneficio personal, pero puede llegar a contribuir al conocimiento del desarrollo del carácter intelectual de las futuras generaciones del colegio. La información recolectada por la investigación será anónima y confidencial, lo cual significa que la misma será aislada y solo el investigador podrá verla. En ningún momento su nombre y apellido serán divulgados o publicados. Los resultados generales serán compartidos con los padres y docentes de la institución, en donde no se incluirán resultados individuales. Asimismo, estos resultados generales podrán ser divulgados para que otras personas interesadas aprendan de esta investigación. Al finalizar la recolección de datos, se informarán los resultados generales obtenidos en este proyecto.

¿A quién debo contactar por cualquier consulta/duda?

Usted decide voluntariamente que su hija participe en esta investigación y tiene el derecho de estar informado del proceso realizado con su hija, para lo cual podrá remitirse al docente investigador a cargo del estudio por cualquiera de los medios que la institución ofrece para la comunicación padre/docente. Una vez otorgada la autorización de los padres/tutores, se comunicara a su hija sobre los objetivos y características de esta investigación. Su hija puede aceptar o negarse a participar de las actividades, o asimismo, aceptar participar pero abandonar o retirarse de la actividad en cualquier momento. En caso de que considere que sus derechos no han sido respetados, podrán contactar con la Orientadora del Colegio Próspero Pinzón IED.

Se deja constancia que usted ha recibido todas las explicaciones sobre la realización del estudio, que todas sus dudas han sido respondidas satisfactoriamente por el investigador involucrado y que ha comprendido plenamente las respuestas de las mismas.

Consentimiento (completado por padre, madre o tutor)

Autorizo a Beltrán Perez Julieth Alexandra (Apellido y nombre de su hijo/a) de 14 años de edad para que participe en el proyecto de investigación.

Firma del madre/padre/tutor: Yeimi Perez A.

Número de cédula: 52'871.165 Bta

Asentimiento del niño/a participante (completado por el niño/a)

Nombre del niño/a: Julieth Alexandra Beltrán Perez

Desea participar de este proyecto X NO

Número de la tarjeta de Identidad: 1000019234

CONSENTIMIENTO INFORMADO E2

COLEGIO PROSPERO PINZÓN IED

Aprobada por Resolución No. 868 del 28 de febrero de 2007
Supresión de sellos: decreto 2150 artículo 11 del 5 de diciembre de 1995
DANE 11100127301 Inscripción SED 6542 Nit 830048428-7/ICFES 059410
E-MAIL: cedprosperopinzon8@gmail.com

Bogotá, 6 de febrero de 2017

Señores
Padres de familia
Grado Décimo
Colegio Próspero Pinzón IED

Asunto: **CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPANTES EN PROYECTO DE INVESTIGACIÓN**: "La integración de GeoGebra en el desarrollo del carácter intelectual"

Cordial saludo.

Muy respetuosamente invito a su hija a participar en un proyecto de investigación destinado a describir rasgos de carácter intelectual (Ritchhardt, 2002) en el desarrollo del pensamiento matemático de dos estudiantes de grado décimo del Colegio Próspero Pinzón IED a partir de una tarea de geometría mediada por el software Geogebra, cuyo investigador responsable es el Lic. Jonathan Eduardo Ruiz Ramírez, estudiante de la Maestría en Educación de la Universidad Externado de Colombia.

Para el siguiente proyecto, fueron seleccionadas dos estudiantes de grado décimo del Colegio Próspero Pinzón IED. La decisión de que su hija participe en este proyecto es completamente voluntaria, usted puede decidir en cualquier momento dejar de participar e interrumpir el estudio si así lo desea. Si usted decidè participar, este consentimiento le otorgará la información necesaria sobre el proyecto tales como, el propósito, en qué consiste y cómo se llevará a cabo.

¿Qué implica la participación de mi hija en este proyecto?

Su hija será invitada a realizar en el horario de clases una tarea de geometría mediada por el software GeoGebra en forma individual.

La participación de su hija en esta investigación no supondrá ningún beneficio personal, pero puede llegar a contribuir al conocimiento del desarrollo del carácter intelectual de las futuras generaciones del colegio. La información recolectada por la investigación será anónima y confidencial, lo cual significa que la misma será aislada y solo el investigador podrá verla. En ningún momento su nombre y apellido serán divulgados o publicados. Los resultados generales serán compartidos con los padres y docentes de la institución, en donde no se incluirán resultados individuales. Asimismo, estos resultados generales podrán ser divulgados para que otras personas interesadas aprendan de esta investigación. Al finalizar la recolección de datos, se informarán los resultados generales obtenidos en este proyecto.

¿A quién debo contactar por cualquier consulta/duda?

Usted decide voluntariamente que su hija participe en esta investigación y tiene el derecho de estar informado del proceso realizado con su hija, para lo cual podrá remitirse al docente investigador a cargo del estudio por cualquiera de los medios que la institución ofrece para la comunicación padre/docente. Una vez otorgada la autorización de los padres/tutores, se comunicara a su hija sobre los objetivos y características de esta investigación. Su hija puede aceptar o negarse a participar de las actividades, o asimismo, aceptar participar pero abandonar o retirarse de la actividad en cualquier momento. En caso de que considere que sus derechos no han sido respetados, podrán contactar con la Orientadora del Colegio Próspero Pinzón IED.

Se deja constancia que usted ha recibido todas las explicaciones sobre la realización del estudio, que todas sus dudas han sido respondidas satisfactoriamente por el investigador involucrado y que ha comprendido plenamente las respuestas de las mismas.

Consentimiento (completado por padre, madre o tutor)

Autorizo a Erika Jiménez Marulanda (Apellido y nombre de su hijo/a) de 14 años de edad para que participe en el proyecto de investigación.

Firma del madre/padre/tutor: Maria A Ceballos

Número de cédula: 29462370

Asentimiento del niño/a participante (completado por el niño/a)

Nombre del niño/a: Erika Jiménez Marulanda

Desea participar de este proyecto [X] NO

Número de la tarjeta de Identidad: 1001330453

DIARIO DE CAMPO

TESIS - INTERVENCION.

(1) Tienen dificultad con la herramienta.

(2) los estudiantes muestran interés en como sus compañeros van haciendo la construcción

(3) Los estudiantes no siguen al pie de la letra las instrucciones (construcción).

(4) los estudiantes se ven concentrados y dispuestos a realizar la construcción

Preguntas.

los estudiantes estan muy consentrados

- No se atreven a ir más allá de la informa de las longitudes de las hipotenusas la pregunta: Puedes predecir sin hacer calculos la longitud de la 7ma hipotenusa

Marulanda NO } les digo y si te
Ivan Mauricio NO } digo que SI. (tratandolos de invitar a pensar mejor sus respuestas)

- Cuando un estudiante falta a clase se rompe el proceso...

- En algunas ocasiones el estudiante enfoca su atención en cosas que no se le preguntan porque les parece interesantes.

- Calderon manifiesta muy contento que la 7ma hipotenusa es la mitad de las 5 y esta la mitad de la 3 y es la mitad de la 1.

- Mientras trabajan en la actividad refuerza conceptos previos o ~~aprenden n~~

- La confianza y el reconocimiento se va adquiriendo.

- Geraldin corrige su grafica y se sorprende cuando se da cuenta de que si puedo predecir la 7ma hipotenusa.

$\frac{n_1}{2} = n_3$ $\quad n_7 = \frac{\frac{n_3}{2}}{2}$

$\frac{n_3}{2} = n_5$ $\quad n_7 = \frac{\frac{n_3}{2}}{2}$ $\quad n_7 = \frac{n_3}{4}$

$\frac{n_5}{2} = n_7$ $\quad n_7 = \frac{\frac{n_1}{2}}{2^2}$ $\quad n_7 = \frac{\frac{n_1}{2}}{4}$

$\frac{n_1}{1}$ $\quad n_3 = \frac{n_1}{2}$ $\quad n_7 = \frac{n_1}{8}$

$n_7 = \frac{n_1}{2^3}$

$n_{101} = \frac{n_1}{2}$ $\quad \frac{n}{2}$ $\quad n_5 = \frac{n_3}{2}$

$\frac{10}{2} = 5$ $\quad n_1 = \frac{n_1}{2^0}$ $\quad n_7 = \frac{n_5}{2}$

7

$n_3 = \frac{n_1}{2}$

la estudiante empieza apreguntarse por otros aspectos. Se hace preguntas

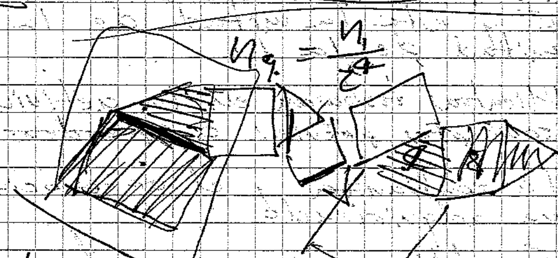
$n_5 = \frac{n_1}{2^2}$

n_7

$\frac{2n}{2} = n$ $\quad n_7 = \frac{n_1}{2^3}$

$n_9 = \frac{n_1}{2^4}$ $\quad n_1 \div 2$

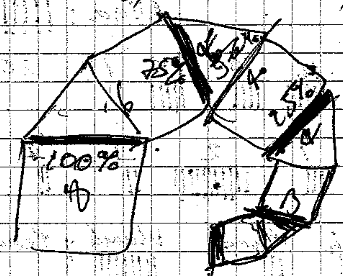
$\frac{l_1}{2} = l_2$



par: $2n$

impares: $2n-1$

los ideas de los estudiantes despiertan la curiosidad del docente se hacen presente los pensamientos criticos, reflexivo y creativo.



$$\frac{8}{6} = \frac{100\%}{x}$$

$$x = \frac{600\%}{8}$$

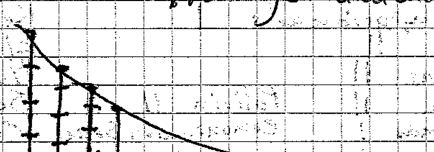
$$x = 75\%$$

$$\frac{6}{x} = \frac{100\%}{75\%}$$

$$x = \frac{6 \cdot 75\%}{100\%}$$

$$x = 4,5$$

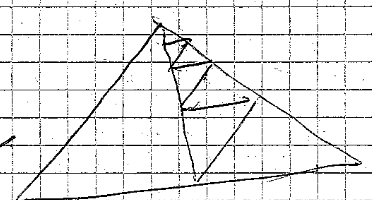
Erika a pesar de que esta equivocada despierta su curiosidad y Judith ante su expresión de asombro muestra su disposición para el trabajo académico.



DD MM AA

- Julieth al dibujar el cuadrado tiene claridad en que es un polígono regular y se apoya en esta para la construcción con geogebra.
- Las estudiantes exploran la barra de herramientas ~~fortaleciendo~~ afianzando conocimientos Geom.
- Erika y Julieth presentan dificultad en la construcción del triángulo rectángulo isósceles. (lo hacen por tanteo)
- Julieth logra darse cuenta que al trazar las diagonales obtiene 4 triángulos rect. isósceles
- Julieth y Erika al tratar de buscar las relaciones entre las hipotenusas, miran la cara de docente (gestos) como esperando su aprobación. "Debo motivarlas, no limitarlas".
- Empiezan a hacer registros (datos) Buscan estrategias.
- Ya se evidencia avances encuentran relaciones entre H, H2 en la H1 y H2 se les dificulta ¿por qué?
- **Fórmulas? Animo a la estudiante.**
- **Julieth quiere encontrar la forma de saber la longitud entre de todas las hip. impares. (Cuestiona su propio pensamiento) Enfoca su pensamiento.**
- Erika trata de hacer el árbol pitagórico en el cuaderno, se aburre y practica la herramienta tecnológica. No tiene avances pero se ve muy dispuesta al trabajo académico.

- Es impresionante la felicidad de Julieth fue y me busco para decirme que lo había logrado; al comienzo no entiendo lo que dice debo recurrir a sus apuntes. Le pido que organice mejor sus ideas.
- Al felicitar a la estudiante se le ve dispuesta a avanzar.
- Hipotenusas pares? Maravilloso.

- Las estud. utilizan sus hallazgos para validar nuevas ideas, esto facilita su validación.
- 
Erika tiene una idea interesante, aun no aclara su pensamiento pero su imaginación se hace presente.
- Erika retoma la idea de su compañera de buscar una formula, es interesante como la idea de su compañero motivo a otro.

Geogebra les ayuda a encontrar áreas de figuras que no son tan familiares (polígonos irregulares)
Erika no tiene ganas de trabajar, algo pasa ... tiene problemas en casa (factores externos que limitan la disposición

---

- El acceso a la sala de informatica es muy difícil, en ocasiones esta sujeta a las dinámicas institucionales.

$\Delta S_{H_2O} = (0,4)(4186)\ln\left(\frac{298,35}{288,15}\right) = 58,24$

$\Delta S_{Cu} = (0,25)(387)\ln\left(\frac{298,35}{288,15}\right) = 3,36.$

$\Delta S_T = -53,29 + 58,24 + 3,36.$

$\Delta S_T = 8,31$

(A)

(8) $T_f = 15°C = 288,15 K$

$W = 166 J.$

$Q_c = 415 J.$

$\frac{Q_f}{Q_c} = \frac{T_f}{T_c}$

$W = Q_c + Q_f \Rightarrow Q_f = W - Q_c = 166 - 415$

$Q_f = -249$

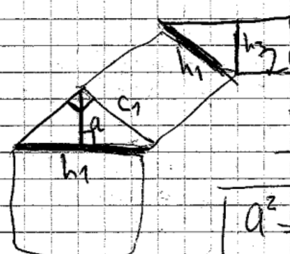
$\left|\frac{Q_f}{Q_c}\right| = \frac{T_f}{T_c}$

$T_c = T_f\left|\frac{Q_c}{Q_f}\right| = (288,15)\left|\frac{415}{-249}\right| = 480,25 K.$

(B) $h_2^2 = \sqrt{c_1^2 + c_1^2} = \sqrt{2c_1^2} = \sqrt{2}\, c_1$

$h_1 \to$ inicial.

$\sqrt{2}\, c_1 \to h_1$



$2c_1^2 = h_1^2$

$\frac{h_1^2}{2} = c_1^2$

$\frac{h_1^2}{2}$

$\boxed{a^2 = \frac{3c_1^2}{2}}$ $a = \sqrt{\frac{3}{2}}\, c_1$

$\boxed{a^2 + \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 = c_1^2} \Rightarrow a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\, c_1}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{2c_1}{4} = a^2 + \frac{c_1^2}{2} = c_1^2$

- Mi compañero de área es muy interesado por los logros de la estudiante. Se sorprende y más sabiendo que es una estudiante muy regular.
- Julieth se interesa más en las hipotenusas y trabaja más en las áreas. Las temáticas no son tan importantes, no limitan el pensamiento.
- Julieth encuentra que el área del triángulo es cuatro veces la del cuadrado. La invito a verificar. "Una sana dosis de escepticismo" ayudo a que corrigiera su pensamiento.

* Carácter intelectual desarrolla comp. Matemáticas o es al revés?

- Las estudiantes se sienten orgullosas de lo van encontrando. Sienten que tienen cosas importantes para decir.

- No veo que exista un orden creativo, reflexivo, crítico se puede de lo creativo, ir a lo crítico y de ahí a lo reflexivo ???
- Trabajo colaborativo (categoría emergente).
- Pensamiento matemático se empieza a evidenciar y no solo el geométrico.
- Las estudiantes muestran agrado al llegar la clase de matemáticas, no piensan en la nota.

- Los estudiantes se muestran más cercanos al docente, a la clase, esto fortalece la disposición.
- Con sorpresa vi en el descanso a los estudiantes en sala de informática trabajando sus ideas (~~la disposición~~ El desarrollo intelectual fortalece o mejora el trabajo académico)

- La estudiante (Julieth) logra encontrar una formula a partir de la relación de las áreas (tal vez sino relaciona esto) no logra encontrar la formula de las hipotenusas pares. Monitorea su pensamiento, busca otras alternativas y no abandona sus ideas.
- Erika encuentra otra forma que establecer la longitud de las hipotenusas impares. (Exponente) Varias formas de afrontar un problema.
- La estudiante retoma su idea de las altura y esto le permite establecer que la suma de los triángulos del árbol es igual al area del primer triángulo. Lo anterior corresponde les a una sola rama. dice que, como se van dividiendo a la mitad y con su dibujo tuvo esta idea.
- Se ve interes en saber que han hecho sus compañeros.

UNIDAD DIDÁCTICA

PEI "EDUCAR PARA LA VIDA A PARTIR DE UNA SANA CONVIVENCIA"

UNIDAD DIDÁCTICA DE ASIGNATURA POR PERIODO ACADÉMICO

CAMPO DE CONOCIMIENTO: MATEMÁTICO

ASIGNATURA: TRIGONOMETRÍA **DOCENTE: JONATHAN EDUARDO RUIZ RAMÍREZ**

CICLO: V **GRADO: DÉCIMO** **SEMESTRE: I**

PERIODO: I

HILO CONDUCTOR

¿Cuál es la relación que existe entre el contexto que me rodea con cada campo de conocimiento y a su vez con la matemática?

TOPICOS GENERATIVOS

¿CÓMO DESARROLLAR EL CARÁCTER INTELECTUAL A PARTIR DE UNA TAREA DE GEOMETRÍA MEDIADA POR EL SOFTWARE GEOGEBRA?

METAS DE COMPRENSIÓN	**DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN**	**INDICADORES DE DESEMPEÑO**	**ESTRATEGIA METODOLÓGICA**	**RECURSOS**	**VALORACIÓN CONTÍNUA**
Los estudiantes comprenderán cómo a partir de buenas preguntas que inciden en el desarrollo del carácter intelectual, y del uso de recursos digitales como el software GeoGebra se fortalece los aprendizajes geométricos.	1-Encontrar las relaciones entre las hipotenusas y el área de las figuras.	1.1-Construye el árbol pitagórico con la ayuda del software GeoGebra 1.2-Reconoce algunas relaciones entre las hipotenusas y el área de las figuras. 1.3-Propone preguntas a partir de la tarea de geometría mediada por el software GeoGebra	Para potenciar el pensamiento matemático es necesario cuestionar la estructura del pensamiento, como lo plantea Paul (2002), de esta manera se realiza el planteamiento de una instrucción y se generan una serie de preguntas a partir de la misma. CONSIGNA Construir un cuadrado y sobre uno de los lados construir un triángulo	Sala de Informática y computadores Software GeoGebra Diario de Campo Entrevista	Quien posee carácter intelectual está más proclive a ser matemáticamente competente pues puede responder a una situación o a un problema matemático de manera creativa (-Mente abierta: atreverse a ir más allá, considerar nuevas ideas, ensayar nuevas cosas y más que

	2-Contestar por escrito las preguntas propuestas para cuestionar la estructura de su pensamiento.	2.1-Propone ideas que conllevan a la solución de las preguntas propuestas o a sus propias preguntas 2.2- Entrega sus anotaciones en forma clara y ordenada, dando a conocer las respuestas a sus preguntas. 2.3-Argumenta la validez de sus anotaciones ante el	rectángulo isósceles tal que la hipotenusa sea un lado del cuadrado. Luego construir un cuadrado en cada lado del triángulo y repetir el proceso. CUESTIONAMIENTOS ¿Qué relación encuentra entre la longitud de la hipotenusa 1 y la hipotenusa 2? ¿Qué relación encuentra entre la longitud de la hipotenusa 1 y la hipotenusa 3? ¿Qué relación encuentra entre la longitud de la hipotenusa 2 y la hipotenusa 4?		nada demostrar voluntad de considerar opciones. - Curiosidad: no temer a imaginar y hacerle interrogaciones al mundo), reflexiva (Metacognición: la cual es la capacidad de pensar sobre su propio pensamiento, y monitorea sus propios procesos de pensamiento. Implica ser consciente de los problemas que pueden aparecerle a

	3- Respetar los valores institucionales favoreciendo la sana convivencia.	docente o ante sus pares académicos. 3.1-Escucha las opiniones de sus pares académicos favoreciendo la actividad académica 3.2-Pide la palabra para dar a conocer sus ideas. 3.3-Reconoce la importancia de la pregunta, da a conocer las propias	¿Puede predecir sin hacer cálculos, la longitud de la hipotenusa del séptimo triángulo isósceles rectángulo? ¿Qué relaciones existen entre las áreas? ¿Existirá otra forma de solucionar el problema que le fue planteado? ¿Qué le despierta curiosidad de este ejercicio?		su pensamiento y orientar el pensamiento hacia ciertas rutas) y crítica (- Búsqueda activa de la verdad y la comprensión, de pensar lo que más le conviene, se plantea varias posibilidades, indaga por evidencias y pone a prueba la validez de las respuestas. - El uso de estrategias, que se pone metas, planea, busca ser productivo. - Cultivo del

		y respeta la de sus pares académicos.			escepticismo, una sana dosis de escepticismo ayuda a evaluar mejor la información que recibe. Es receptivo a nuevas ideas pero actúa con ojo crítico). A medida que los estudiantes van desarrollando la tarea de geometría, se verifica el aprendizaje a través de las respuestas a las preguntas propuestas. La triangulación

					entre la propuesta teórica de Ritchhardt sobre el carácter intelectual y las respuestas a las siguientes preguntas a dos estudiantes para evidenciar la presencia de posibles rasgos del carácter intelectual. ¿Quisiera saber algo más que no ha indagado o preguntado? ¿Se le ocurre pensar en si a sus compañeros se les

					ocurren las mismas preguntas que a usted? ¿Cree usted estar seguro de la veracidad de su respuesta a las preguntas que le fue planteadas? ¿Por qué? ¿Cómo sabe usted o cree saber que lo que usted afirma es cierto? ¿Por qué es importante para usted comprender bien la pregunta y

					la solución? ¿Qué tanto le ayudó GeoGebra a encontrar la respuesta a las preguntas?, ¿Qué estrategia utilizó para resolver esta pregunta? ¿Reconoce haber escogido una estrategia de solución?, ¿Tuvo dudas en algún momento? ¿Sintió que

					avanzaría a pesar de no estar tan seguro?”